Informatique Appliquée au Calcul Scientifique

Cours 9

Systèmes linéaires tridiagonaux

François Dubois, décembre 2004, édition 03 août 2006, 15 pages.

IACS (9)

Systèmes linéaires tridiagonaux

(1) Rappel sur les matrices

- Soit n un entier $\geqslant 1$. Une matrice carrée A d'ordre n est la donnée de n^2 nombres $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ qu'on présente sous la forme d'un tableau :

$$(1) \quad A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dans la notation a_{ij}, l'indice i désigne le numéro de la ligne et l'indice j le numéro de la colonne.

- On peut aussi se donner un vecteur $x \in \mathbb{R}^{t,n}$ qu'on écrit à l'aide d'une colonne :

$$(2) \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{t,n}.$$

Dans la décomposition (2) du vecteur x, le nombre x_j appartient à $\mathbb{R}$ et c'est le coefficient de la j^{o} ligne du vecteur x, qu'on peut également voir comme un tableau à n lignes et une colonne

- on distingue $x \in \mathbb{R}^{t,n}$ de $y \in \mathbb{R}^n$ formé d'une seule <u>ligne</u> et de n colonnes :

$$(3) \qquad y \doteq (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Les notations $\mathbb{R}^{t,n}$ et $\mathbb{R}^n$ sont en général confondues, ce qui peut entraîner des confusions

- on peut multiplier la matrice carrée A par le vecteur $x \in \mathbb{R}^{t,n}$ à <u>sa droite</u>. Le résultat de la multiplication $A \cdot x$ est alors un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{t,n}$:

$$(4) \qquad A \cdot x = \xi \in \mathbb{R}^{t,n}, \; A \text{ matrice } n \times n, \; x \in \mathbb{R}^{t,n}.$$

La i^{o} ligne du vecteur $A \cdot x$ s'obtient en multipliant pour chaque colonne j l'élément a_{ij} sur la i^{o} ligne et la j^{o} colonne par le nombre x_j qui est sur la j^{e} ligne de x, puis en additionnant les valeurs correspondantes pour toutes les valeurs de j :

$$(5) \qquad (A \cdot x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \quad , x \in \mathbb{R}^{t,n}, \; A \text{ carrée } n \times n$$

- on peut aussi multiplier la <u>ligne</u> y par la matrice carrée A ; la matrice A est alors située <u>à droite</u> de la ligne y :

(6) $\quad y \cdot A \quad = y \in \mathbb{R}^n$, A matrice $n \times n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

La j^e colonne de $y \cdot A$ s'obtient en multipliant chaque colonne y_k par l'élément de A sur la k^e ligne et la j^e colonne, puis en ajoutant les résultats précédents pour toutes les valeurs de k:

(7) $$(y \cdot A)_j = \sum_{k=1}^{n} y_k \, a_{kj} \,, \begin{cases} y \in \mathbb{R}^n \\ A \text{ carrée } n \times n. \end{cases}$$

- Si A et B sont deux matrices carrées $n \times n$, le produit $A \cdot B$ s'obtient en considérant la matrice B comme une succession de n vecteurs de $\mathbb{R}^{t,n}$ et en juxtaposant les résultats des colonnes ainsi obtenues. Le produit $A \cdot B$ est donc une nouvelle matrice carrée d'ordre n, dont l'élément générique (i, j) (i indice de ligne et j indice de colonne) vaut

(8) $$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, b_{kj} \,, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

- Le produit des matrices est associatif :

(9) $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

puisque l'élément (i,j) de ce produit s'écrit simplement

$$(10) \quad (A.B.C)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ik}\, b_{kl}\, c_{lj}$$

et peut se factoriser sous la forme

$$\sum_{l=1}^{n} (AB)_{il}\, c_{lj} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, (BC)_{kj}.$$

(2) Factorisation de Gauss d'un système d'ordre 2

- On se donne une matrice A, carrée d'ordre 2, un vecteur $b \in \mathbb{R}^{t,2}$ et on cherche $x \in \mathbb{R}^{t,2}$ de sorte que

$$(11) \qquad A.x = b, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- La méthode de Gauss consiste à factoriser A sous la forme du produit de deux matrices triangulaires L et U, avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure :

$$(12) \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad L.U = A$$

- On effectue le produit de L par U. Il vient

$$(13) \qquad L.U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\alpha & \gamma\beta + \delta \end{pmatrix}$$

L'égalité $L.U = A$ conduit aux quatre équations scalaires suivantes, d'inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et de données a, b, c, d:

(14) $\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma\alpha = c, \quad \gamma\beta + \delta = d$.

- Si $\underline{a \neq 0}$, le système (14) se résout sans difficulté :

(15) $\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \gamma = c/\alpha, \quad \delta = d - \gamma\beta,$

avec une écriture "algorithmique" (15) qui permet de calculer effectivement et <u>dans cet ordre</u> les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des matrices L et U.

- Une fois la factorisation de Gauss effectuée, c'est à dire une fois les matrices L et U connues, le système linéaire (11) s'écrit

(16) $L.U.x = b$.

On le résout en deux étapes. On fait d'abord le changement de variables $Ux = y$, on résout ensuite le système linéaire $Ly = b$, puis enfin le système $Ux = y$ pour expliciter la solution x. Le système (16) est équivalent à

(17) $Ly = b$,

(18) $Ux = y$.

- On commence par résoudre le système linéaire (17) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

soit $y_1 = b_1$, $\gamma y_1 + y_2 = b_2$.
Le calcul effectif de y peut donc s'écrire sous la forme

(19) $$y_1 = b_1 , \quad y_2 = b_2 - \gamma y_1 .$$

- On résout ensuite le système (18) :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} ,$$

soit $\alpha x_1 + \beta x_2 = y_1$, $\delta x_2 = y_2$. Si $\underline{\delta \neq 0}$, on peut expliciter x selon

(20) $$x_2 = y_2 / \beta \quad , \quad x_1 = (y_1 - \beta x_2)/\alpha$$

- On remarque que la matrice triangulaire supérieure U est inversible si et seulement si $\alpha \delta \neq 0$. La factorisation $A = L.U$ avec L et U sous la forme (12) peut ne pas aboutir. C'est le cas par exemple pour la matrice A donnée par

(21) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Il convient dans ce cas de permuter les équations, pour se ramener à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Factorisation de Gauss pour une matrice trois par trois

- On se donne une matrice A tridiagonale d'ordre 3, c'est à dire de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

on cherche L et U triangulaires inférieure et supérieure comme au paragraphe 2, mais également tridiagonales, c'est à dire n'ayant des éléments non nuls qu'aux mêmes emplacements que la matrice A :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

- La factorisation $LU = A$ demande de calculer le produit $L.U$:

$$L.U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 \alpha_1 & \gamma_1 \beta_1 + \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_2 \alpha_2 & \gamma_2 \beta_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

on écrit l'égalité $LU = A$ issue de (24) et (22) en suivant les flèches proposées à la relation (24) :

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha_1 = a_1 \\ \beta_1 = b_1 \\ \gamma_1\alpha_1 = c_1 \\ \gamma_1\beta_1 + \alpha_2 = a_2 \\ \beta_2 = b_2 \\ \gamma_2\alpha_2 = c_2 \\ \gamma_2\beta_2 + \alpha_3 = a_3 . \end{cases}$$

On peut résoudre le système de proche en proche en suivant l'ordre des équations de la relation (25). Il vient, avec l'hypothèse $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ (puis le résultat $\alpha_3 \neq 0$, utile pour la suite) :

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha_1 = a_1 , \ \beta_1 = b_1 , \ \gamma_1 = c_1 / \alpha_1 , \ \alpha_2 = a_2 - \gamma_1\beta_1 \\ \beta_2 = b_2 , \ \gamma_2 = c_2/\alpha_2 , \ \alpha_3 = a_3 - \gamma_2\beta_2 . \end{cases}$$

- Une fois les matrices L et U calculées, on pose $y = Ux$ comme inconnue auxiliaire et on résout les systèmes (17) et (18) successivement :

$$(27)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

soit $\quad y_1 = b_1 , \ \gamma_1 y_1 + y_2 = b_2 , \ \gamma_2 y_2 + y_3 = b_3 ,$

$$(28)\quad y_1 = b_1 , \ y_2 = b_2 - \gamma_1 y_1 , \ y_3 = b_3 - \gamma_2 y_2 .$$

avec une écriture proche de la mise en œuvre d'un algorithme.

- Pour le système (18), il vient

$$(29) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$(30) \quad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = y_1 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2 x_3 = y_2 \\ \alpha_3 x_3 = y_3 \end{cases}$$

on évalue x en effectuant une "remontée" à partir de la relation (30), c'est à dire en partant de la dernière équation. Il vient, sous l'hypothèse

$$(31) \qquad \alpha_j \neq 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$(32) \quad \begin{cases} x_3 = y_3 / \alpha_3 \\ x_2 = (y_2 - \beta_2 x_3) / \alpha_2 \\ x_1 = (y_1 - \beta_1 x_2) / \alpha_1 , \end{cases}$$

ce qui permet de calculer complètement la solution du système linéaire $Ax = b$.

4) Matrice tridiagonale d'ordre n

- La matrice A est d'ordre n; elle est tridiagonale, c'est à dire que si $j \neq i$, $i-1$ ou $i+1$, A_{ij} est nul:

(33) $\quad A_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |j-i| \geq 2.$

- On introduit des notations spécifique pour la diagonale principale

(34) $\quad A_{ii} = a_i \,, \quad 1 \leq i \leq n$

pour la diagonale supérieure:

(35) $\quad A_{i,i+1} = b_i \,, \quad 1 \leq i \leq n-1$

et pour la diagonale inférieure :

(36) $\quad A_{i+1,i} = c_i \,, \quad 1 \leq i \leq n-1.$

- On cherche une matrice L triangulaire inférieure (L pour "lower" en anglais)

(37) $\quad L_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad l \geq k+1$

et une matrice U triangulaire supérieure (U pour "upper"):

(38) $\quad U_{kl} = 0 \quad \text{si} \quad k \geq l+1$

qui soient de plus tridiagonales:

(39) $\quad L_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |j-i| \geq 2, \quad U_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |j-i| \geq 2.$

Donc seules deux diagonales de L sont non-nulles, la diagonale principale pour laquelle on pose par convention

(40) $$L_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

et la première diagonale inférieure, où l'on a :

(41) $$L_{i+1,i} = \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

- De manière analogue, la diagonale principale de la matrice U est non nulle

(42) $$U_{ii} = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

(43) $$\alpha_i \neq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

et la condition (43) est <u>essentielle</u> au succès de l'algorithme. La première diagonale supérieure de U est également non nulle a priori ; on pose

(44) $$U_{i,i+1} = \beta_i, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

- Quand on effectue le produit LU, l'élément générique de ligne i et de colonne j est donné à l'aide de la relation (8) :

(45) $$(L \cdot U)_{ij} = \sum_{m=1}^{n} L_{im} \quad U_{mj}$$

si $|j-i| \geq 2$, c'est à dire si $j \leq i-2$ par exemple pour fixer les idées, le coefficient U_{lj} est nul pour $m \geq j+1$ compte tenu de (38) et le coefficient L_{im} est nul pour $m \geq i+1$ compte tenu de (37)

Le coefficient $L_{im} \times U_{mj}$ au membre de droite de (45) est non nul seulement si $m \leq i$ et $m \leq j$. Comme L est tridiagonale, ceci n'est possible que pour $m = i$ mais U_{ij} est alors nul car U est tridiagonale. La preuve pour $j \geq i+2$ est analogue et est laissée au lecteur :

(46) $\qquad (LU)_{ij}$ est nul si $j \leq i-2$ ou $j \geq i+2$

et le produit $L \cdot U$ est bien une matrice A tridiagonale. Nous retenons aussi du raisonnement précédent

(47) $$(LU)_{ij} = \sum_{m \leq \inf(i,j)} L_{im}\, U_{mj}$$

- Si $j = i$, L_{im} est non nul pour $m = i$ ou $m = i-1$ (relation (41)) et U_{mj} est non nul pour $m = i$ ou $m = i-1$. La relation (47) s'écrit dans ce cas :

(48) $$\gamma_{i-1}\, \beta_{i-1} + \alpha_i = a_i \quad \text{si } i \geq 2 .$$

Pour $j = i-1$, L_{im} est nul si $m \leq i-2$, donc seule la valeur $m = i-1$ contribue à la somme (47). On obtient

(49) $$\gamma_{i-1}\, \alpha_{i-1} = c_{i-1} \quad , 2 \leq i \leq n-2$$

Pour $j = i+1$, $U_{i-1,i+1}$ est nul compte tenu de (39), donc seule la valeur $m = i$ donne une contribution au second membre de (47). On a donc

$$(50) \qquad U_{i,i+1} = \beta_i = b_i, \quad i \leq n-1.$$

- Il s'agit maintenant d'exploiter <u>au mieux</u> les relations (48)(49) et (50) afin d'écrire un algorithme de calcul des α_i $(1 \leq i \leq n)$ et des β_i et γ_i pour $1 \leq i \leq n-1$. On a bien entendu

$$(51) \qquad \alpha_1 = a_1.$$

Imaginons avoir calculé le produit LU pour des indices k, l tels que $k \leq i$ et $l \leq i$.

On suppose donc connus α_j pour $j \leq i$, β_j pour $j \leq i-1$ et γ_j pour $j \leq i-1$. À l'ordre $i+1$, on a en vertu de (50)

$$(52) \qquad \beta_i = b_i$$

puis grâce à (49) (avec i changé en $i+1$) :

$$(53) \qquad \gamma_i = c_i / \alpha_i$$

et enfin en vertu de (48) (avec i changé en $i+1$) :

$$(54) \qquad \alpha_{i+1} = a_{i+1} - \gamma_i \beta_i$$

et on vient de calculer β_i et γ_i.

- On peut donc écrire l'algorithme suivant

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{De } i = 1 \text{ à } i = i-1, \text{ faire} \\ \quad \beta_i = b_i \\ \quad \gamma_i = c_i / \alpha_i \\ \quad \alpha_{i+1} = a_{i+1} - \gamma_i \beta_i \\ \text{Fin faire.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Une fois les matrices L et U calculées à l'aide de l'algorithme (55) et surtout une fois qu'on s'est assuré de la condition (43) de <u>non-nullité des pivots</u>, la résolution du système linéaire $Ax=b$ s'effectue grâce à (17) puis (18). Le produit Ly s'écrit

(56) $$(Ly)_i = \sum_j L_{ij}\, y_j = \sum_{j\leq i} L_{ij}\, y_j$$

compte tenu de la relation (37). Mais comme L est tridiagonale inférieure, on a

(57) $$y_1 = b_1$$

(58) $$\gamma_{i-1}\, y_{i-1} + y_i = b_i \quad \text{si } i \geq 2$$

Le calcul de y solution de $Ly=b$ s'obtient à l'aide de l'algorithme de descente :

(59) $$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = b_1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{Pour } i \geq 2, \\ \quad y_i = b_i - \gamma_{i-1}\, y_{i-1} \\ \text{fin de boucle.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Pour calculer x à partir de y (relation (18)), on note que le produit Ux s'écrit

(60) $$(Ux)_i = \sum_k U_{ik}\, x_k = \sum_{k\geq i} U_{ik}\, x_k$$

au vu de (38). Mais la matrice U est tridiagonale et seules les valeurs de $k=i$

et $k=i+1$ doivent être retenus dans le terme de droite de la relation (60). On en tire

$$(61) \qquad \alpha_i x_i + \beta_i x_{i+1} = y_i \qquad i \leq n-1$$

$$(62) \qquad \alpha_n x_n = y_n .$$

on déduit de ces considérations l'algorithme de "remontée"

$$(63) \left\{ \begin{array}{l} x_n = y_n / \alpha_n \\ \left[\begin{array}{l} \text{Boucle sur } k : 1 \to n-1 \\ \quad i = n-k \\ \quad x_i = (y_i - \beta_i x_{i+1}) / \alpha_i \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui part de la relation finale (62) et remonte ensuite les indices pour terminer par $i=1$ (soit $k=n-1$ dans les notations de l'algorithme (63)).

- La résolution du système $Ax=b$ pour une matrice A tridiagonale s'effectue pour un coût proportionnel à l'ordre n du système.

D, dec 04.