

COURS 4

## Algorithme de Newton

- 1) Principe de l'algorithme
- 2) Exemples
- 3) Convergence
- 4) Exercice : divergence de la série harmonique
- 5) Exercice : calcul de la première racine de l'équation  $\operatorname{tg}x = x$

## ① Principe de l'algorithme

- on suppose dans ce chapitre qu'on cherche à résoudre une équation de la forme

$$(1) \quad f(x) = 0$$

où  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou d'une partie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) est une fonction dérivable dont la dérivée  $f'(x)$  ne s'annule pas :

$$(2) \quad f'(y) \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- on suppose également qu'à l'étape  $n$  de l'algorithme, on dispose d'une valeur  $x_n$  tel que  $f(x_n)$  est peu différent de zéro :

$$(3) \quad f(x_n) \approx 0$$

- L'idée consiste à développer  $f(x)$  pour  $x$  voisin de  $x_n$  à l'aide de la formule de Taylor

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + O(x - x_n)^2$$

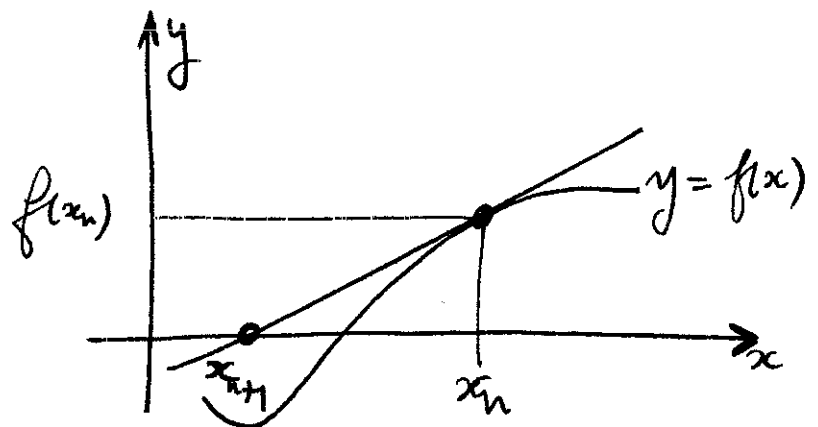


Figure 1. algorithme de Newton; on confond la courbe avec sa tangente au voisinage de  $x_n$

il a confondre la courbe  $y = f(x)$  avec la tangente à celle-ci au point  $(x_n, f(x_n))$  lors du passage de  $x_n$  au point suivant  $x_{n+1}$  de l'algorithme. Au lieu de résoudre l'équation (1), on calcule  $x_{n+1}$  à partir de  $x_n$  selon la relation

$$(4) \quad f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

soit (voir la figure 1)

$$(5) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} \cdot f(x_n).$$

- L'initialisation de l'algorithme s'effectue à l'aide d'une valeur  $x_0$  telle que

$$(6) \quad f(x_0) \approx 0,$$

ce qui constitue l'étape délicate de l'algorithme. Il peut être même conseillé d'utiliser un autre algorithme comme la dichotomie pour expliciter une valeur  $x_0$  tel que la relation (6) a lieu.

## ② Exemples

- Nous avons déjà résolu l'équation (1) associé à

$$(7) \quad f(x) = x^3 + x - 1$$

avec l'algorithme du point fixe. La dérivée  $f'(x) = 3x^2 + 1$  n'est jamais nulle, donc le dénominateur dans la relation (5) ne pose pas de problème de "division par zéro".

On a alors

$$(8) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1}, \quad n \geq 0$$

qui définit une suite récurrente qui converge (très vite!) vers l'unique solution  $x^*$  de l'équation (1).

- Une autre application classique de l'algorithme de Newton consiste à calculer le réel  $\sqrt{a}$ , qui, bien entendu, vérifie  $x^2 - a = 0$ , mais de façon équivalente, (1), avec

$$(9) \quad f(x) = x - \frac{a}{x}, \quad x > 0.$$

Comme précédemment,  $f'(\cdot)$  n'est jamais nulle pour  $x \neq 0$ , et la relation (5) s'écrit maintenant

$$(10) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - a/x_n}{1 + a/x_n^2}, \quad x_0 > 0.$$

La convergence jusqu'à la précision relative de la machine (de l'ordre de  $10^{-15}$ ) demande moins de dix étapes en pratique!

- Nous pouvons aussi recalculer  $\pi$  en utilisant la relation  $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$ , soit

$$(11) \quad f(x) = \operatorname{tg} x - 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

on a alors  $f'(x) = 1/\cos^2 x$  et l'algorithme de Newton prend la forme

$$(12) \quad x_{n+1} = x_n - \cos^2 x_n (\operatorname{tg} x_n - 1), \quad x_0 = 1.$$

Il faut aussi multiplier le résultat "final" de (12) par 4!!

### ③ Couvergence

• La vitesse extraordinaire avec laquelle l'algorithme de Newton converge nous incite à essayer de comprendre comment cet algorithme permet de se rapprocher de plus en plus vite d'une valeur limite  $x^*$ . Nous commençons par l'algorithme du point fixe, pour lequel l'analyse est plus facile.

• On suppose que la dérivée  $f'(y)$  vérifie

$$(13) \quad |f'(y)| \leq K, \quad \forall y, \quad \text{avec } 0 \leq K < 1.$$

De plus, on suppose que l'algorithme de point fixe  $x_n$  défini par

$$(14) \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers l'unique solution  $x^*$  de l'équation

$$(15) \quad f(x^*) = x^*$$

dans l'intervalle considéré. On introduit la suite des erreurs  $E_n$  par

$$(16) \quad E_n = x_n - x^*$$

Par soustraction de (15) à (14), on a :

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*), \quad \text{donc}$$

$$(17) \quad |E_{n+1}| \leq K |E_n|.$$

La suite des erreurs en valeur absolue se comporte comme une suite géométrique :

$$(18) \quad |E_n| \leq K^n |E_0|, \quad n \geq 0$$

ce qui indique une vitesse de convergence

correcte, surtout si  $K \leq 0$ !

- Pour l'algorithme de Newton, l'analyse est un peu plus délicate. On suppose toujours que la suite  $x_n$ , cette fois définie à l'aide de la relation (4), converge vers la solution  $x^*$  de l'équation (1) dans l'intervalle de référence. On suppose de plus que  $f'(x^*) \neq 0$ , donc qu'il existe  $\delta > 0$  de sorte que
 
$$(19) \quad |f'(x_n)| \geq \delta > 0, \quad \forall n \geq 0$$
 à condition de demander l'algorithme par  $x_0$  assez proche de  $x^*$ .

- On développe les différents termes de la relation (4) à l'aide de la formule de Taylor:

$$(20) \quad f(x_n) = f(x^*) + f'(x^*) \varepsilon_n + \frac{1}{2} f''(\xi_n) \varepsilon_n^2$$

$$(21) \quad f'(x_n) = f'(x^*) + f''(\tilde{\xi}_n) \varepsilon_n,$$

où  $\xi_n$  et  $\tilde{\xi}_n$  sont deux réels dans l'intervalle  $]x^*, x_n[$  permettant d'écrire les relations de Taylor-Lagrange (20) et (21). On injecte les relations (20) et (21) au sein de (4). Il vient, compte tenu de la relation "triviale"  $f(x^*) = 0$ :

$$\left( f'(x^*) + \frac{1}{2} f''(\xi_n) \varepsilon_n \right) \varepsilon_n + \left( f'(x^*) + f''(\tilde{\xi}_n) \varepsilon_n \right) (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) =$$

soit

$$(22) \quad \left( f'(x_n) + f''(\tilde{\xi}_n) \varepsilon_n \right) \varepsilon_{n+1} = \left( f''(\tilde{\xi}_n) - \frac{1}{2} f''(\xi_n) \right) \varepsilon_n^2.$$

- on suppose pour fixer les idées, que la dérivée seconde de  $f$  est bornée sur l'intervalle d'étude :

$$(23) \quad |f''(y)| \leq M, \quad \forall y$$

et que l'erreur initiale est assez petite pour que

$$(24) \quad |\varepsilon_n| \leq \frac{1}{2} \frac{\delta}{M}, \quad \forall n \geq 0.$$

on a alors

$$\begin{aligned} |f'(x_n) + f''(\tilde{\xi}_n) \varepsilon_n| &\geq |f'(x_n)| - |f''(\tilde{\xi}_n)| |\varepsilon_n| \\ &\geq \delta - M \frac{1}{2} \frac{\delta}{M} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

et

$$|f''(\tilde{\xi}_n) - \frac{1}{2} f''(\xi_n)| \leq \frac{3}{2} M.$$

on déduit de la relation (22) et des inégalités précédentes

$$\frac{\delta}{2} |\varepsilon_{n+1}| \leq \frac{3}{2} M |\varepsilon_n|^2$$

soit

$$(25) \quad |\varepsilon_{n+1}| \leq C |\varepsilon_n|^2, \quad C = \frac{3M}{\delta}.$$

- La suite  $|\varepsilon_n|$  tend alors vers 0 très très vite. Si on imagine que  $C \leq 1$  et  $\varepsilon_n \approx 10^{-k}$ , ce que l'on dispose de  $k$  chiffres significatifs de  $x^*$ , la relation (25) indique  $|\varepsilon_{n+1}| \leq 10^{-2k}$ . on dispose à l'étape suivante de  $2k$  chiffres significatifs. L'algorithme de Newton double le nombre de chiffres significatifs à chaque étape!

#### ④ Exercice 1 Divergence de la série harmonique. 7

\* Soit  $(u_n)$  une suite de nombres réels positifs.

A partir  $n \in \mathbb{N}$  de cette famille, on peut former une nouvelle suite  $S_n$ , appelée série associée à la suite  $u_n$ . on pose

$$(1) \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad n \geq 0.$$

on remarque qu'on a

$$(2) \quad S_n = S_{n-1} + u_n, \quad n \geq 1$$

et on peut se poser deux questions : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ? La série  $(u_n)$ , i.e. la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

\* La première remarque est que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante car  $u_n \geq 0$ , compte tenu de la relation (2). Selon que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée ou non bornée, elle

converge vers une somme  $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$  ou elle diverge vers  $+\infty$ , et on écrit alors  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty$ . Si  $S_n \rightarrow S$ ,

alors  $S_{n-1} \rightarrow S$  également et compte-tenu de (2),  $u_n \rightarrow 0$ . Une condition nécessaire pour que la

série  $S_n$  converge est que la suite  $u_n$  tende vers 0.

\* on sait que si  $u_n = q^n$  est une suite géométrique de raison  $q$  telle que  $|q| < 1$ , alors la série  $S_n$  peut se recalculer facilement:

$$(3) \quad 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad n \geq 0.$$



ou a alors  $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$  car  $|q|^{n+1} \rightarrow 0$  puisque  $|q| < 1$ .  
 La série  $S_n$  converge si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 en module.

\* Dans le cas de la "série harmonique", i.e

$$(4) \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

nous allons montrer qu'il n'en est pas de même. Le calcul numérique nous indique que  $u_{10000} \approx 9,7876$  et  $u_{524288} \approx 13,747$ , ce qui montre que si divergence il y a, celle-ci est lente. Une première méthode consiste à comparer la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec le graphe de la fonction  $f(x) = 1/x$

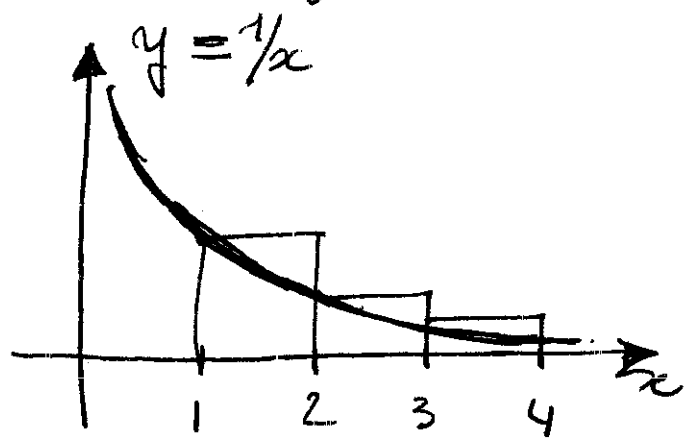


Figure 2 Série harmonique

• on a par exemple (voir la figure 2)

$$S_3 \geq \int_1^4 \frac{dx}{x} = \log 4$$

où  $\log$  désigne le logarithme Népérien, ou naturel, défini par :

$$(5) \quad \log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0.$$

Plus généralement, si  $k \leq x \leq k+1$ , on a  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x}$  donc par intégration sur l'intervalle  $]k, k+1[$  :  $\frac{1}{k} \geq \log(k+1) - \log k$ .  
 on somme la relation précédente de  $k=1$

à  $k = n$  et on obtient

$$(6) \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1), \quad n \geq 1$$

ce qui démontre que  $S_n \nearrow +\infty$  si  $n \rightarrow \infty$ .

- on peut démontrer la relation précédente de façon plus simple sans faire appel explicitement à la relation (5) qui définit le logarithme. on a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \frac{1}{2}$$

et on écrit cette relation successivement pour  $n=1, 2, 4, 8, \dots, 2^{k-1}$ . Il vient par sommation

$$(7) \quad S_{2^k} \geq \frac{1}{2} k + 1, \quad k \text{ entier } \geq 0$$

ce qui établit que la série harmonique  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$  diverge.

- (5) Exercice 2 Calcul de la première racine non triviale de l'équation  $\operatorname{tg} x = x$  par un algorithme de point fixe.

- Nous cherchons ici à résoudre numériquement l'équation

$$(1) \quad \operatorname{tg} x = x, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

et nous admettons que

(la figure 3 le montre  
nouvellement!) ce problème

admet une unique solution

$$x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

- L'utilisation d'un algorithme

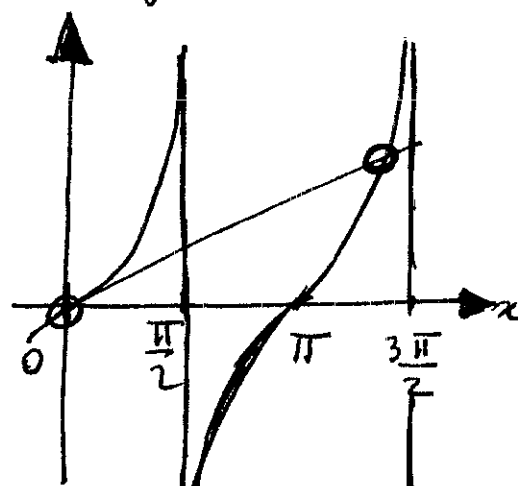


Figure 3. Intersection de la courbe  $y = \operatorname{tg} x$  et de la première bissectrice

de point fixe du type  $x_0 = \operatorname{tg} x_0$  est exclu  
 ou la dérivée de la fonction tangente en  
 rayons  $> 1$  dans l'intervalle  $]\pi, 3\pi/2[$ . Il faut  
 donc transformer la relation (1) pour énoncer ce  
 problème de manière équivalente à l'aide  
 d'une fonction "plus douce", ie telle que  
 (2)  $\exists K, 0 \leq K < 1, |f'(z)| \leq K, \forall z$   
 par laquelle on va pouvoir utiliser le théorème  
 du point fixe.

o La fonction  $\operatorname{Arctg}$  est définie par

$$(3) \quad y = \operatorname{Arctg} \xi \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = \xi \text{ et } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

ou a alors  $\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} \xi) = \xi$  lorsque  $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$ .  
 Comme  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ , on a  $-\frac{\pi}{2} < x - \pi < \frac{\pi}{2}$  et

$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}(x - \pi)) = x - \pi$  compte tenu de la rela-  
 tion précédente (poser  $\xi = x - \pi$ ). or  $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$ .  
 En prenant l' $\operatorname{Arctg}$  des deux membres de la relation  
 (1), nous avons donc

$$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi = \operatorname{Arctg} x.$$

c'est à dire

$$(4) \quad \operatorname{Arctg} x + \pi = x, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

o d'équation (4) est équivalente à l'équation (1). Elle  
 se résout sans difficulté par point fixe puisque  
 $\left| \frac{d}{dx} \operatorname{Arctg} x \right| < 1 \quad \forall x \neq 0$ . Le calcul numérique  
 conduit à  $x \approx 4,4934$ .

§, 28/10/04.