le cnam

Modélisation Numérique pour le Génie des Procédés

Paris, automne 2015

Cours 04

Schéma implicite pour l'équation de la chaleur

François Dubois

CNAM Paris
Génie des Procédés
Modélisation Numérique 26 avril 2013

IV Schéma implicite pour l'équation de la chaleur.

1) Ecriture du schéma

On étudie le même problème qu'à la leçon précédente : chercher $u(x,t) \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$ de sorte que

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - K \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \; t > 0, \; K > 0$

(2) $u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$

(3) $u(x,0) = u_0(x) \quad , \; 0 \leq x \leq L$.

- La discrétisation en espace permet d'introduire le pas Δx :

(4) $\Delta x = \dfrac{L}{J} \quad , \; J$ entier ≥ 0 ,

un pas de temps $\Delta t > 0$, et le nombre sans dimension

(5) $\sigma = K \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

on approche $u(j\Delta x, n\Delta t)$ par un nombre u_j^n :

(6) $$u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t), \quad 0 \leqslant j \leqslant J, \ n \text{ entier} \geqslant$$

- on a vu que

(7) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left[u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right]$$

et on approche $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n$ par le schéma en temps à 2 points

(8) $$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right).$$

on insère (7) et (8) dans l'équation (1), ce qui définit le schéma centré en espace implicite en temps

(9) $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - K\,\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant J-1.$$

on complète cette évolution entre les instants n et $n+1$ par la condition limite (2) qui s'écrit, compte tenu de (6) :

(10) $$u_0^{n+1} = 0, \quad u_J^{n+1} = 0$$

2) Système linéaire.

On peut introduire le paramètre >0 ρ de la relation (5) et réécrire la relation (9) :

$$(11) \qquad -\rho\, u_{j+1}^{n+1} + (1+2\rho)\, u_j^{n+1} - \rho\, u_{j-1}^{n+1} = u_j^{n}, \quad 1 \leq j \leq J-1$$

Si u_0^{n+1} et u_J^{n+1} sont connus, l'ensemble de $(J-1)$ équations (11) est relatif aux $(J-1)$ inconnues

$$(12) \qquad X_j = u_j^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq J-1$$

qui permettent de construire un vecteur $X \in \mathbb{R}^{J-1}$.
De même, le membre de droite de (11) définit un "vecteur second membre" $b \in \mathbb{R}^{J-1}$ par

$$(13) \qquad b_j = u_j^{n}, \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

- On introduit la matrice A à $(J-1)$ lignes et $(J-1)$ colonnes :

$$(14) \qquad A = \begin{bmatrix} 1+2\rho & -\rho & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -\rho & 1+2\rho & -\rho & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & -\rho & 1+2\rho & -\rho & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & -\rho & 1+2\rho & -\rho \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\rho & 1+2\rho \end{bmatrix}.$$

Avec les notations (12)(13)(14), les relations (11) prennent la forme

$$A \cdot X = b . \qquad (15)$$

• La matrice A est symétrique, tridiagonale. On peut démontrer qu'elle est inversible dès que ξ est positif. Sa résolution demande d'utiliser les techniques classiques de factorisation de Gauss et de "descente-remontée". Nous ne les mettons pas en œuvre dans le cadre de ce cours, et renvoyons par exemple au livre de Lascaux et Théodor (Analyse Numérique matricielle, Masson, 1986). Avec le logiciel "octave", la résolution de (15) est facile, après la mise en données (13)(14).

3) Stabilité.

Nous avons vu lors de la leçon précédente que le schéma explicite demande de satisfaire à la condition de stabilité $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$. Pour le schéma implicite (11), l'analyse de Van Neumann montre qu'il suffit de supposer

$$\xi > 0 . \qquad (16)$$

- on introduit une "onde" u_j^n de la forme

$$(17) \quad u_j^n = \hat{u}(k)\, e^{ikj\Delta x}, \quad k \in \mathbb{R},\ j \in \mathbb{Z}$$

et on cherche u_j^{n+1} de la même forme. Alors

$$(18) \quad u_{j+1}^{n+1} = e^{i\xi} u_j^{n+1}, \quad u_{j-1}^{n+1} = e^{-i\xi} u_j^{n+1},$$

avec le nombre d'onde ξ défini par

$$(19) \quad \xi = k\Delta x .$$

Le membre de gauche de (11) s'écrit alors

$$-\varsigma u_{j-1}^{n+1} + (1+2\varsigma) u_j^{n+1} - \varsigma u_{j+1}^{n+1} =$$

$$= \left[-\varsigma e^{-i\xi} + (1+2\varsigma) - \varsigma e^{i\xi}\right] u_j^{n+1}$$

$$= (1+2\varsigma - 2\varsigma\cos\xi)\, u_j^{n+1}$$

$$= (1+2\varsigma(1-\cos\xi))\, u_j^{n+1} = \left(1+4\varsigma \sin^2\frac{\xi}{2}\right) u_j^{n+1}$$

La relation (11) s'écrit donc

$$(20) \quad \left(1+4\varsigma \sin^2\frac{\xi}{2}\right) u_j^{n+1} = u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Donc u_j^{n+1} s'obtient par une simple multiplication à partir de u_j^n :

$$(21) \qquad u_j^{n+1} = g(\varsigma,\xi)\; u_j^n, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(22) \qquad g(\varsigma,\xi) = \left(1 + 4\varsigma \sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^{-1}.$$

- La stabilité demande que pour toute onde ($\forall \xi \in \mathbb{R}$), le coefficient d'amplification $g(\varsigma,\xi)$ soit de module inférieur ou égal à 1. En effet, la suite géométrique (21) reste toujours bornée si et seulement si

$$(23) \qquad |g(\varsigma,\xi)| \leq 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

or si $\varsigma > 0$, $0 < g(\varsigma,\xi) < 1$, quel que soit $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui montre la propriété.

- Nous retenons que le schéma implicite demande de résoudre un système linéaire ce qui constitue toujours un investissement important. En revanche, il autorise l'emploi de grands pas de temps.

4) Solution exacte dans un cas particulier.

On se donne une condition initiale à peine différente de (17)

$$(24) \qquad u_0(x) = V \sin\left(\ell\pi \frac{x}{L}\right), \quad 0 < x < L, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Alors $-\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \left(\dfrac{l\pi}{L}\right)^2 u_0$ et on peut chercher $u(x,t)$ solution de (1)(2)(3) sous la forme "à variables séparées"

(25) $$u(x,t) = g(t)\, u_0(x), \quad 0 < x < L, \; t \geq 0 .$$

- Compte tenu de (3), on a

(26) $$g(0) = 1$$

et (1) peut s'écrire

(27) $$\frac{dg}{dt} + K\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 g = 0 \;, \quad t > 0$$

Le problème (26)(27) est analogue à celui étudié lors des deux premières leçons :

(28) $$g(t) = \exp\left[-K\left(\frac{l\pi}{L}\right)^2 t\right], \qquad t > 0 .$$

A l'aide de (24) (25) et (28), on dispose d'une solution exacte de (1)(2)(3) qui permet de valider et tester l'approximation numérique proposée aux paragraphes 1 à 3.

FDubois
29 avril 2013.