le cnam

Modélisation Numérique pour le Génie des Procédés

Paris, automne 2015

Cours 02

Schémas d'Euler implicite et de Crank - Nicolson

François Dubois

II Schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

1) Construction des schémas

On s'intéresse au problème modèle

(1) $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = 0 \quad , \quad t>0, \quad \tau > 0$.

(2) $u(0) = u_0$

où $\tau > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ sont donnés. On cherche à approcher le système dynamique (1)(2) par un schéma aux différences finies, paramétré par un pas de temps $\Delta t > 0$. Pour k entier $\geqslant 0$, on cherche

(3) $u^k \simeq u(k\Delta t), \quad k \in \mathbb{N}$.

- Pour construire l'algorithme, on part de la relation fondamentale

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{du}{dt}\, dt$$

puis on remplace $\frac{du}{dt}$ par sa valeur calculée à l'aide de l'équation différentielle (1) :

$$(4) \quad u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) - \frac{1}{\tau}\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\, dt .$$

- La relation (4) est exacte. On approche l'intégrale du membre de droite de (4) à l'aide d'une formule des rectangles ou des trapèzes. Si on utilise les rectangles "à gauche", on trouve le schéma d'Euler explicite, étudié à la leçon 1. Si on utilise une formule des rectangles "à droite", c'est à dire

$$(5) \quad \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\, dt \simeq \Delta t\, u((k+1)\Delta t) \simeq \Delta t\, u^{k+1}$$

et qu'on approche dans la relation (4) les valeurs exactes par les approximations (3), on trouve, après avoir remplacé le symbole d'approximation "$\simeq$" par une égalité :

$$(6) \quad u^{k+1} = u^{k} - \frac{\Delta t}{\tau}\, u^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

C'est une <u>équation discrète</u>, d'inconnue u^{k+1}, qui caractérise le schéma d'Euler implicite. On la résout sans difficulté :

$$(7) \quad u^{k+1} = \frac{u^k}{1+\frac{\Delta t}{\tau}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

au prix d'une division...

- Si au lieu d'utiliser une formule des rectangles telle que (5) on utilise une méthode des trapèzes, c'est à dire

$$(8) \quad \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\,dt \simeq \frac{\Delta t}{2}\left[u(k\Delta t) + u((k+1)\Delta t)\right] \simeq \frac{\Delta t}{2}\left(u^k + u^{k+1}\right),$$

l'injection de (3) et de (8) dans la relation (4) conduit à une nouvelle équation pour évaluer u^{k+1} si u^k est connu :

$$(9) \quad u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{2\tau}\left(u^k + u^{k+1}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

La relation (9) caractérise le schéma de Crank-Nicolson. L'inconnue u^{k+1} se déduit (dans le cas du modèle dynamique (1)) sans difficulté :

$$(10) \quad u^{k+1} = \frac{1-\frac{\Delta t}{2\tau}}{1+\frac{\Delta t}{2\tau}}\, u^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2) Analyse de stabilité.

Nous disposons de trois schémas aux différences pour le système dynamique (1)(2) : le schéma d'Euler explicite

(11) $$u^{k+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) u^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

le schéma d'Euler implicite (7) et le schéma de Crank-Nicolson (10). Dans les trois cas, on fabrique une suite récurrente $u^k \rightsquigarrow u^{k+1}$ de la forme

(12) $$u^{k+1} = q\, u^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

qui est une <u>suite géométrique</u>.

- Nous savons que si la raison q d'une suite géométrique est de module strictement supérieur à 1, alors la suite $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend en module vers l'infini (si $u_0 \neq 0$).
  Cette propriété mathématique est un <u>artefact</u> dans le programme d'approximation de (1)(2). En effet, si $u_0 \neq 0$, la solution $u(t)$ du système dynamique (1)(2) tend vers zéro si t tend vers $+\infty$. Par contre, dans les mêmes conditions $|u^k|$ tend vers $+\infty$ si k tend vers $+\infty$!

Il est nécessaire d'imposer une condition de stabilité pour l'algorithme (12) :

(13) $$|g| \leqslant 1 .$$

• Pour le schéma d'Euler explicite, cette relation s'écrit

(14) $$\left| 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right| \leqslant 1 .$$

La relation (14) s'écrit

$$-1 \leqslant 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \leqslant 1 \text{ , soit } 0 \leqslant \frac{\Delta t}{\tau} \leqslant 2$$

(15) $$0 \leqslant \Delta t \leqslant 2\tau$$, Euler explicite.

• Pour le schéma d'Euler implicite, on a

(16) $$\left| \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\tau}} \right| \leqslant 1 .$$

Pour $\tau > 0$ et $\Delta t > 0$, l'inégalité (16) est toujours satisfaite ; il n'y a pas de contrainte de stabilité pour le schéma d'Euler implicite si on approche le système dynamique (1)(2).

- Pour le schéma de Crank-Nicolson, la condition (13) s'écrit

$$(17) \qquad \left| \frac{1 - \frac{\Delta t}{2\tau}}{1 + \frac{\Delta t}{2\tau}} \right| \leq 1 .$$

Si $\Delta t > 0$ et $\tau > 0$, on n'a ici encore aucune condition sur le pas de temps.

- Nous retenons que le schéma d'Euler explicite est stable sous la condition (15) alors que le schéma d'Euler implicite est toujours stable, quand on approche le système dynamique (1)(2).

3) Positivité.

Si $\tau > 0$ et $u_0 > 0$, la solution $u(t)$ du modèle (1)(2) est toujours positive. En est-il de même pour les schémas numériques étudiés ici ? En d'autres termes, à quelle condition le rapport u^{k+1} / u^k reste-t-il positif ? Compte tenu de (12), cette condition s'écrit

$$(18) \qquad q \geq 0 .$$

- Pour le schéma d'Euler explicite, cette condition s'écrit

(19) $\quad \Delta t \leq \tau$.

Elle renforce la condition de stabilité (15).

- Pour le schéma d'Euler implicite, si $\tau > 0$ et $\Delta t > 0$, la condition (18) est toujours vérifiée. On peut donc utiliser un pas de temps $\Delta t > 0$ arbitrairement grand dans de bonnes conditions si $\tau > 0$.

- Pour le schéma de Crank-Nicolson, les conditions (10) et (18) entraînent

(20) $\quad \Delta t \leq 2\, \tau$.

Dans la pratique, la positivité entraîne une condition de stabilité-positivité pour le pas de temps Δt.

- Nous retenons que pour un modèle (1)(2) de constante de temps $\tau > 0$, les diverses contraintes de stabilité expriment que le pas de temps Δt doit rester de l'ordre de la constante de temps τ du processus.

16 avril 2013. Dubois.