

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 12

Éléments finis vectoriels (iv)

Discrétisation cartésienne d'un champ de vecteurs

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Ordre asymptotique à deux dimensions d'espace

Éléments d'arêtes

François Dubois

janvier 2006, 14 pages

ch (IV)

Éléments finis vectoriels (iv).

Cours du 4 janvier 2006

① Discrétisation catégorique d'un champ de vecteurs.

- Un interlude dans l'étude de champs conformes ($H(\text{div})$ et $H(\text{rot})$) pour rappeler qu'il existe des problèmes où tout a fait naturellement, le champ de vecteurs inconnu $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^3$) appartient à un sous-espace de $(H^1(\Omega))^3$. Ainsi pour l'élasticité linéaire, on cherche un déplacement u nul sur une partie $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ de la frontière. on donne le tenseur (linéarisé) des déformations ε :

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

puis le tenseur des contraintes σ :

$$(1.2) \quad \sigma_{ij} = \lambda (\text{tr} \varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

où $\text{tr} \varepsilon = \sum_j \varepsilon_{jj}$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$,
 λ et μ sont les coefficients de Lamé!

- Les équations d'équilibre dans le volume Ω sont écrites à l'aide de la donnée $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ d'un champ de forces:

$$(1.3) \quad \text{div} \sigma + f = 0 \quad \Omega$$

soit en développant les diverses composantes :

$$(1.4) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(u) + f_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Un champ de forces surfaciques $F: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est également donné, avec $\overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} = \partial\Omega$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et la contrainte surfacique sur le bord Γ_1 s'écrit

$$(1.5) \quad \sum_j \sigma_{ij}(u) \cdot n_j = F_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \text{ sur } \Gamma_1$$

où n est la normale extérieure au domaine Ω .

- Une formulation variationnelle de l'équation d'équilibre (1.4) jointe à la loi de comportement (1.1)(1.2) et aux conditions aux limites (1.5) et

$$(1.6) \quad u=0 \text{ sur } \Gamma_0$$

consiste à prendre un champ de déplacement test (ou virtuel) v satisfaisant à (1.6) ($v=0$ sur Γ_0), à former $\varepsilon_{ij}(v) \equiv \tilde{\varepsilon}_{ij}$, à multiplier l'équation (1.4) par v_i puis à intégrer sur Ω après sommation sur i :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma + f) \cdot v &= \int_{\Omega} (\partial_j \sigma_{ij} + f_i) v_i \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_j v_i + \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} n_j v_i + \int_{\Omega} f_i v_i \\ &= - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \tilde{\varepsilon}_{ij} dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} F_i v_i d\sigma \end{aligned}$$

car $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ puisque c'est le cas pour ε_{ij} , et compte tenu de la loi de Hooke (1.2).
On tire alors de (1.3)

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} F_i v_i ds, \quad \forall v \text{ nul sur } \Gamma_0$$

ce qui conduit à une formulation variationnelle bien classique dans l'espace $(H^1(\Omega))^3$ restreint aux fonctions nulles sur Γ_0 .

- Pour un tel problème, le plus raisonnable est de discrétiser le champ de vecteurs u par ses composantes u_j :

$$(1.8) \quad u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3; \quad u_j \in \mathbb{R}$$

dont chaque u_j appartient à $H_0^1(\Omega, \Gamma_0) \equiv \{v \in H^1(\Omega), v=0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Il n'est pas utile de considérer des degrés de liberté placés sur les faces du maillage et qui couplent les composantes, comme dans le cas de l'élément RTN. Le nombre de degrés de liberté, si on utilise une approximation P_1 , est de l'ordre de $3N^0$, où N^0 est le nombre de sommets du maillage:

$$(1.9) \quad N^0 = \# \mathcal{V}^0, \text{ nombre de sommets du maillage en négligeant les sommets du maillage sur le bord } \Gamma_0.$$

② Caractéristique d'Euler-Poincaré.

12-4

- Afin de comparer à deux dimensions d'espace le nombre de sommets, N^0 d'arêtes et N^2 de triangles d'un maillage assez régulier, nous avons besoin de définir la caractéristique d'Euler-Poincaré. Soit \mathcal{C} un maillage simplicial d'un ouvert Ω du plan, supposé borné et à frontière polygonale. A condition que le maillage ne soit pas trop grossier pour pouvoir distinguer les composantes connexes de Ω et les (éventuels) trous dans la structure, le nombre

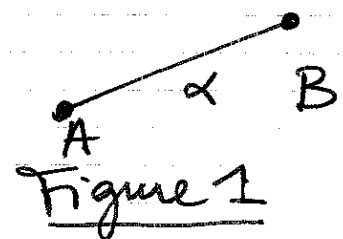
$$(2.1) \quad \chi(\mathcal{C}) \equiv \# \mathcal{C}^0 - \# \mathcal{C}^1 + \# \mathcal{C}^2 = N^0 - N^1 + N^2$$

ne dépend pas du maillage mais seulement du domaine Ω .

- on commence par le cas d'un point P . Alors d'abord

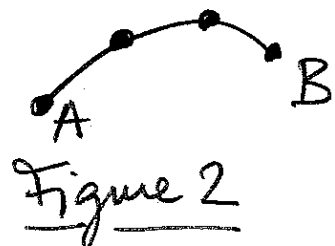
$$(2.2) \quad \chi(P) = 1.$$

Pour une arête $\alpha = (A, B)$ (Figure 1),



on a $\chi(\alpha) = 2 - 1 = 1$.

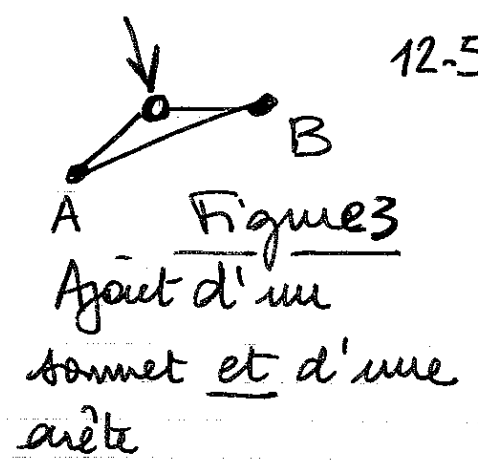
D'un certain point de vue, une arête est un "point allongé". Si on dispose de plusieurs arêtes le long d'un arc de courbe (A, B) (Figure 2),



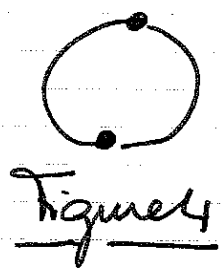
alors $\chi(\widehat{AB}) = N^0 - N^1 = 1$;

c'est la classique remarque du nombre de pièces à linge et de torchons: il faut une pièce à linge

de plus que le nombre de bords.
 Surtout, quand on ajoute un sommet au maillage de l'arc AB, on ajoute également une arête, ainsi qu'illustré à la figure 3.



- Tous les domaines monodimensionnels n'ont pas forcément une caractéristique égale à 1. Le cercle Γ de la figure 4 contient deux sommets et deux arêtes. Donc
 (2.3) $\chi(\Gamma) = 2 - 2 = 0$.



Ce nombre est bien invariant par ajout d'un sommet, car on rajoute du même coup une arête.

- Pour un domaine bidimensionnel, le plus simple est un maillage \mathcal{G} formé d'un seul triangle. On a alors $\#\mathcal{G}^0 = 3, \#\mathcal{G}^1 = 3, \#\mathcal{G}^2 = 1$, donc

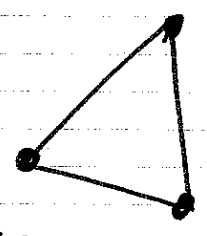


Figure 5

(2.4) $\chi(\text{triangle}) = 3 - 3 + 1 = 1$.

Quand on passe de un à deux triangles (figure 6), on a

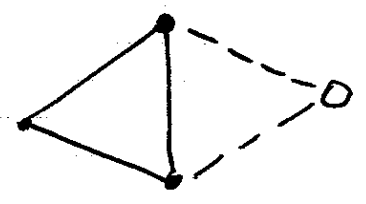


Figure 6

$\chi(\text{maillage à deux triangles}) = \chi(\text{un triangle}) + 1 \text{ sommet} - 2 \text{ arêtes} + 1 \text{ triangle} = \chi(\text{un triangle}) = 1$.

on a donc facilement,
pour un domaine Ω homo-
topy à un point (sans
trou, avec une seule compo-
sante connexe), par récurrence sur le nombre de
triangles

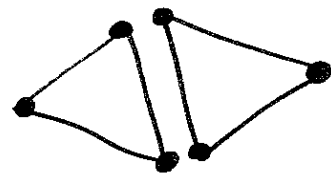


Figure 7

$$(2.5) \chi(\mathcal{T}) = 1, \quad \forall \mathcal{T} \text{ maillage de } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ \Omega \text{ connexe, } \Omega \text{ homotope à un point.}$$

• on remarque aussi (Figure 7), compte tenu de
(2.4) et de $\chi(\alpha) = 1$ pour une arête α :

$\chi(\text{deux triangles}) = 2 \cdot \chi(\text{un triangle}) - \chi(\alpha)$. De
façon générale, on a

$$(2.6) \quad \chi(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T}) + \chi(\mathcal{T}') - \chi(\mathcal{T} \cap \mathcal{T}').$$

on partitionne les sommets de \mathcal{T} en trois, selon
qu'ils appartiennent à $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$, $\mathcal{T} \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}')$ ou $\mathcal{T}' \setminus (\mathcal{T} \cap \mathcal{T}')$,
on fait de même pour les arêtes. Pour les triangles,
on a par construction même d'un maillage \mathcal{T} recouvrant
 Ω , d'un maillage \mathcal{T}' recouvrant Ω' avec $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$,
qu'un triangle appartient à \mathcal{T} ou \mathcal{T}' mais pas
 $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$. on a donc

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}') &= \sum_{S \in \mathcal{T}^0 \cup \mathcal{T}'^0} 1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{T}^1 \cup \mathcal{T}'^1} 1 + \sum_{f \in \mathcal{T}^2 \cup \mathcal{T}'^2} 1 \\ &= \left(\sum_{S \in \mathcal{T}^0} 1 + \sum_{S \in \mathcal{T}'^0} 1 - \sum_{S \in \mathcal{T}^0 \cap \mathcal{T}'^0} 1 \right) - \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{T}^1} 1 + \sum_{\alpha \in \mathcal{T}'^1} 1 - \sum_{\alpha \in \mathcal{T}^1 \cap \mathcal{T}'^1} 1 \right) \\ &\quad + \left(\sum_{f \in \mathcal{T}^2} 1 + \sum_{f \in \mathcal{T}'^2} 1 - \sum_{f \in \mathcal{T}^2 \cap \mathcal{T}'^2} 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \chi(\mathcal{C}) + \chi(\mathcal{C}') - \chi(\mathcal{C} \cap \mathcal{C}')$$

et la relation (2-6) est établie.

- Cette relation permet d'évaluer sans difficulté la caractéristique d'Euler.

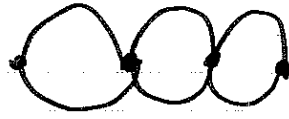


Figure 8 Triple boucle

Poncaré d'une "triple boucle", comme celle de la figure 8

$$\chi(\text{triple boucle}) = 3 \chi(\text{simple boucle}) - 2 \chi(\text{point}) = -2$$

compte tenu de (2-3) et (2-2). La vérification avec le décompte direct sur la figure est immédiate.

- La caractéristique d'Euler

Poncaré est un outil pour vérifier la cohérence des maillages de maillage.

ou un maillage souhaité comme celui de la figure 10, pour lequel $\chi = 1$. Mais

lors du maillage, le point du milieu est éclaté en trois points

(éclatement invisible à échelle grossière voir la figure 9).

Un simple calcul (automatique!) de la caractéristique d'Euler

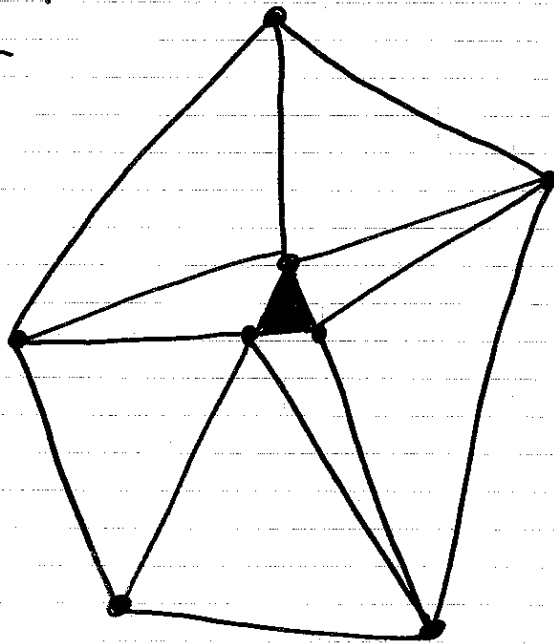


Figure 9. Domainé avec un petit trou

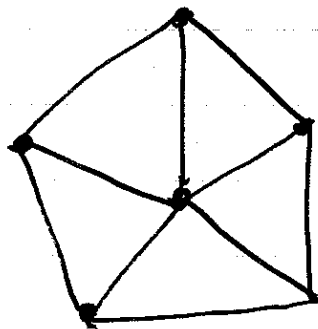


Figure 10 Vue à échelle grossière du domainé avec un petit trou.

Panicore' du maillage "réel" (Figure 3) montre que $\chi(\mathcal{T}) = 0$. Ce triple décompte, complètement arithmétique, met en lumière un défaut géométrique invisible!

12-8

③ ordre asymptotique à deux dimensions d'espace.

- Soit \mathcal{T} le maillage en triangles (assez fins) d'un ouvert Ω borné du plan \mathbb{R}^2 de frontière polygonale pour que le nombre de sommets sur la frontière Ω soit négligeable devant le nombre de sommets intérieurs (ou le nombre total de sommets):

$$(3.1) \quad \#\mathcal{T}^0(\partial\Omega) \ll \#\mathcal{T}^0$$

- On a alors asymptotiquement

$$(3.2) \quad \#\mathcal{T}^2 \approx 2\#\mathcal{T}^0, \quad \#\mathcal{T}^1 \approx 3\#\mathcal{T}^0;$$

le nombre de triangles est deux fois celui des sommets alors qu'asymptotiquement, on a trois fois plus d'arêtes que de sommets! Il suffit d'une part de faire le décompte de tous les angles du maillage. En négligeant les sommets du bord, ce nombre vaut asymptotiquement $2\pi \times$ nombre de sommets intérieurs. On a donc

$$(3.3) \quad \sum_{\mathcal{T}} (\text{angles de } \mathcal{T}) \approx 2\pi \#\mathcal{T}^0.$$

Mais par ailleurs le maillage est formé de

triangles et la somme des angles d'un triangle vaut π : 12-9

$$(3.4) \quad \sum_{\mathcal{T}} (\text{angles de } \mathcal{T}) = \pi \times \# \mathcal{T}^2.$$

Le rapprochement de (3.3) et (3.4) établit la première relation de (3.2). Par ailleurs, l'évaluation de la caractéristique d'Euler-Poincaré de \mathcal{T} montre que

$$(3.5) \quad \# \mathcal{T}^0 - \# \mathcal{T}^1 + \# \mathcal{T}^2 \approx 0.$$

ou $\chi(\mathcal{T})$ est un invariant topologique de Ω qui ne dépend pas du nombre de mailles, par ailleurs supposé très grand. On tire donc de (3.5): $\# \mathcal{T}^1 \approx \# \mathcal{T}^0 + \# \mathcal{T}^2$, ce qui montre, compte tenu du point précédent, la seconde relation de (3.2).

④ Élément d'arêtes

- Proposé indépendamment par JC Nedelec (1980) et Rao (1982), cet élément suppose un maillage par tétraèdres K d'un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière polyédrale. Pour un tétraèdre, les degrés de liberté $\sigma \in \Sigma$ sont associés aux arêtes de K

$$(4.1) \quad \langle \sigma_\alpha, u \rangle = \int_\alpha u \cdot \tau_\alpha d\mathcal{A}, \quad \alpha \text{ arête de } K$$

où $u: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs assez régulier sur K . Ce sont les circulations du champ u le long des arêtes du maillage (Figure 11).

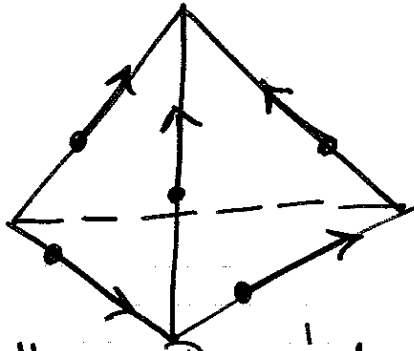


Figure 11 - Degrés de liberté de l'élément d'arêtes.

on a donc

$$(4.2) \quad \#\Sigma = 6$$

puisque un tétraèdre est formé de 6 arêtes. L'espace des polynômes \mathcal{P} est simplement formé de champs de déplacements rigides infinitésimaux

$$(4.3) \quad u \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists \gamma, \beta \in \mathbb{R}^3, u(x) = \gamma + \beta \times x, x \in \mathbb{R}^3.$$

Un polynôme $u \in \mathcal{P}$ dépend de six paramètres, les coordonnées dans \mathbb{R}^3 des deux vecteurs γ et β :

$$(4.4) \quad \dim \mathcal{P} = 6.$$

- on voit facilement (calcul élémentaire laissé au lecteur) que

$$(4.5) \quad \text{rot } u = 2\beta, u \in \mathcal{P}.$$

- on a la propriété d'isobranche de l'élément d'arêtes:

$$(4.6) \quad \forall \gamma_\alpha \in \mathbb{R}^6, \alpha \text{ arête de } K, \exists ! u \in \mathcal{P}, \langle \sigma_\alpha, u \rangle = \gamma_\alpha, \forall \alpha.$$

La donnée d'une famille arbitraire de réels γ_α

(d'arête de K), permet de se construire une unique fonction $u \in P$ ou note \mathcal{L} l'application

$$(4.7) \quad P \ni u \mapsto \mathcal{L}u = \left(\int_{\alpha_j} u \cdot \tau_j \, ds, j=1, \dots, 6 \right) \in \mathbb{R}^6$$

en numérotant de 1 à 6 les arêtes de K . La proposition d'unicité (relation (4.6)) exprime que \mathcal{L} est bijective. Or \mathcal{L} est linéaire (clair!) et d'un $P = \# \Sigma = 6$ compte tenu de (4.2) et (4.4).

Il suffit donc de montrer que $\ker \mathcal{L} = 0$.

• Soit $u \in P$ de sorte que

$$(4.8) \quad \int_{\alpha_j} u \cdot \tau_j \, ds = 0, \quad \forall \alpha_j \text{ arête de } K$$

Alors pour toute face f de K , on a la relation sur le flux du rotationnel :

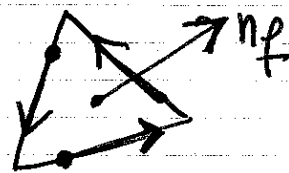


Figure 12

$$(4.9) \quad \int_f \text{rot} u \cdot n_f \, ds = \int_{\partial f} u \cdot \tau \, ds$$

Si ε_α^f désigne l'orientation de l'arête α relativement à la face f ($\varepsilon_\alpha^f = 1$ pour la figure 12'), on a :

$$(4.10) \quad \int_{\partial f} u \cdot \tau \, ds = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}_f} \varepsilon_\alpha^f \left(\int_{\alpha} u \cdot \tau_\alpha \, ds \right)$$

Et cette somme est nulle compte tenu de (4.8).

Donc $\text{rot} u \cdot n_f = 0$ pour toute face f de K car $\text{rot} u = 2\beta$ (relation (4.5)) est un vecteur constant.

Donc $\beta = 0$ car dans un tétraèdre régulier, on a toujours trois faces telles que les trois normales associées forment une base de \mathbb{R}^3 . Par suite,

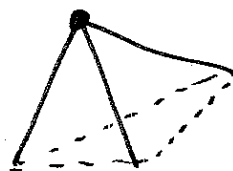


Figure 13

$u(x) = \mathcal{I}$, vecteur constant.
 La relation (4.8) montre alors
 que $\mathcal{I} \cdot \tau_\alpha$ est nul pour les
 arêtes du tétraèdre, en par-
 ticulier pour trois arêtes non
 coplanaires comme à la figure 13 donc $\mathcal{I} = 0$,
 $u = 0$ et l'unicité est établie. \square

- Pour terminer cette leçon, nous explicitons la fonction
 de base locale φ_α^K de l'élément d'arête.

Soit $K = (A, B, C, D)$
 un tétraèdre de \mathbb{R}^3

et $\alpha = (A, B)$ une
 de ses arêtes.

On note $\beta = \vec{CD}$
 le vecteur direc-
 teur de l'arête

opposée, I le
 milieu de (A, B)

et J celui de
 (C, D) . On a

alors

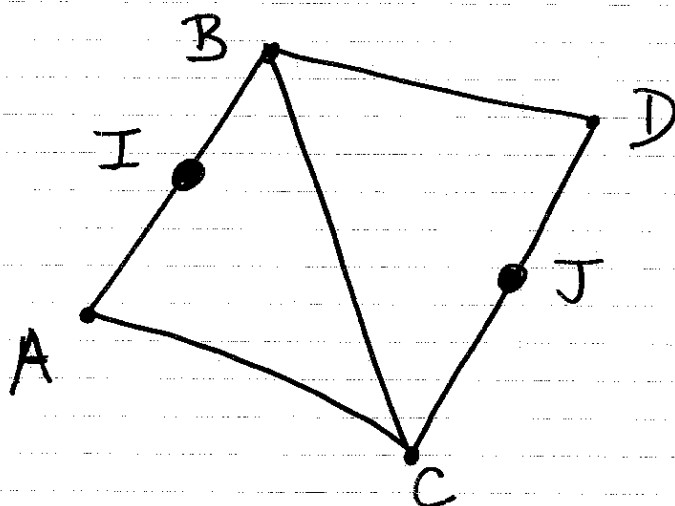


Figure 14 Les arêtes AB et CD sont
 opposées; I est le milieu de (A, B) et
 J le milieu de (C, D) .

$$(4.11) \quad \varphi_\alpha^K(M) = \frac{\vec{CD} \times \vec{JM}}{(\vec{JI}, \vec{AB}, \vec{CD})}, \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha = (A, B).$$

- La preuve de cette propriété est une simple vérification.
 D'abord $\varphi_\alpha^K \in P$ très clairement. Si γ est une arête
 appartenant à l'un des plans contenant l'arête
 (C, D) ($\gamma = (B, D), (A, D)$, ou (C, D)), le vecteur directeur

12-13

τ_γ , le vecteur \vec{CD} et le vecteur \vec{JM} sont coplanaires pour tout point $M \in \gamma$. Donc le degré de liberté correspondant

$$(4.12) \quad \langle \sigma_\gamma, \varphi_\alpha^K \rangle \equiv \int \varphi_\alpha^K \cdot \tau_\gamma ds, \text{ variété de } K$$

est nul. Il ne reste plus qu'à calculer

$$\langle \sigma_\alpha, \varphi_\alpha^K \rangle = \int_\alpha \varphi_\alpha^K \cdot \tau_\alpha ds = \int_A^B \frac{\vec{CD} \times \vec{JM}}{(\vec{JI}, \vec{AB}, \vec{CD})} \cdot \frac{\vec{AB}}{AB} ds$$

$$= \left(\int_A^B \frac{\vec{JM} ds}{AB} \right) \cdot \frac{\vec{AB} \times \vec{CD}}{(\vec{JI}, \vec{AB}, \vec{CD})}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{JA} + \vec{JB}) = \vec{JI}$$

$$= 1,$$

ce qui montre la propriété. \square

Jubois

Strasbourg, 6 janvier 2006.