

# Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

## Cours 09

### Éléments finis vectoriels (i)

Maillage et complexe cellulaire

Maillage bidimensionnel à l'aide de triangles

Maillage tridimensionnel tétraédrique

Interpolation de Lagrange sur  $\mathbb{R}$

Quelques éléments pour l'interpolation de Hermite

Rappel sur les coordonnées barycentriques

Élément P1 de Lagrange dans le plan

François Dubois

novembre et décembre 2005, 28 pages

CVM (9)

## ch IV) Éléments finis vectoriels (i)

Cours du 30 novembre 2005

### ① Maillage et complexe cellulaire

- Un premier exemple (facile!) est la discrétisation d'un intervalle  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels fixés :

$$(1.1) \quad -\infty < a < b < +\infty$$

Réaliser un maillage de l'intervalle  $\Omega = ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  consiste à introduire  $(N-1)$  réels intermédiaires  $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ , de sorte que

$$(1.2) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

Un tel découpage, une telle subdivision met en évidence d'une part les sommets du maillage. On note  $\mathcal{C}^0$  l'ensemble de ces sommets :

$$(1.3) \quad \mathcal{C}^0 = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$

D'autre part, les intervalles  $]x_j, x_{j+1}[$  ( $j=0, \dots, N-1$ ) sont des éléments, des arêtes, des volumes qui permettent de recourir l'intervalle  $\Omega$  de départ. On note  $\mathcal{C}^1$  l'ensemble des arêtes :

$$(1.4) \quad \mathcal{T}^1 = \{ ]x_j, x_{j+1}[ , j=0, \dots, N-1 \} .$$

- On a donc la propriété

$$(1.5) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^1} \bar{K}$$

qui indique que l'intervalle (fermé)  $[a, b]$  est bien la réunion des intervalles  $[x_j, x_{j+1}]$ .

De plus, l'intersection  $\bar{K} \cap \bar{L}$  pour  $K$  et  $L$  deux "éléments" de  $\mathcal{T}^1$  est soit vide, soit réduite à un sommet  $S \in \mathcal{T}^0$  du maillage, soit  $K=L$ .

- la notation  $\mathcal{T}^0$  pour l'ensemble des sommets rappelle qu'il s'agit d'une famille d'éléments géométriques de dimension zéro. De façon analogue, la notation  $\mathcal{T}^1$  pour l'ensemble des arêtes de ce maillage unidimensionnel indique bien qu'il s'agit d'éléments géométriques de dimension 1.

- Le bord  $\partial K = \{A, B\}$  de l'arête  $K = ]A, B[$  est un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{T}^0$  des sommets,

$$(1.6) \quad \partial K \subset \mathcal{T}^0, \quad K \in \mathcal{T}^1 .$$

De façon analogue, le co-bord  $\partial^c S$  d'un sommet  $S \in \mathcal{T}^0$  est composé des (deux) arêtes  $K_g$  et  $K_d$  qui contiennent  $S$  dans leur bord. on a donc

$$(1.7) \quad \partial^c S \subset \mathcal{T}^1, \quad S \in \mathcal{T}^0.$$

De manière plus précise, si  $S = x_j$  est un sommet intérieur, le cobord  $\partial^c S$  de  $S$  est formé de  $]x_{j-1}, x_j[$  et de  $]x_j, x_{j+1}[$ . Si  $S$  est un sommet du bord de  $\Omega$  ( $S = a$  ou  $S = b$ ) alors son cobord n'a qu'un seul élément :  $\partial^c a = ]x_0, x_1[$ ,  $\partial^c b = ]x_{N-1}, x_N[$ , compte tenu du choix (1.2) pour numérotier par ordre croissant les sommets du maillage.

## ② Maillage bidimensionnel à l'aide de triangles

- Dans le cas de deux dimensions d'espace, l'expression des propriétés précédentes est plus délicate car il n'y a pas d'ordre naturel dans le plan. On suppose que  $\Omega$  est une partie du plan  $\mathbb{R}^2$  bornée et de frontière  $\partial\Omega$  polygonale (Figure 1).
- Un maillage simplicial  $\mathcal{T}$  de l'ouvert  $\Omega$  est d'abord la donnée d'une collection  $\mathcal{T}^2$  de triangles  $K$  de sorte que la réunion des triangles fermés  $\bar{K}$  recouvre l'adhérence  $\bar{\Omega}$  du domaine  $\Omega$ ;

$$(2.1) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^2} \bar{K}.$$

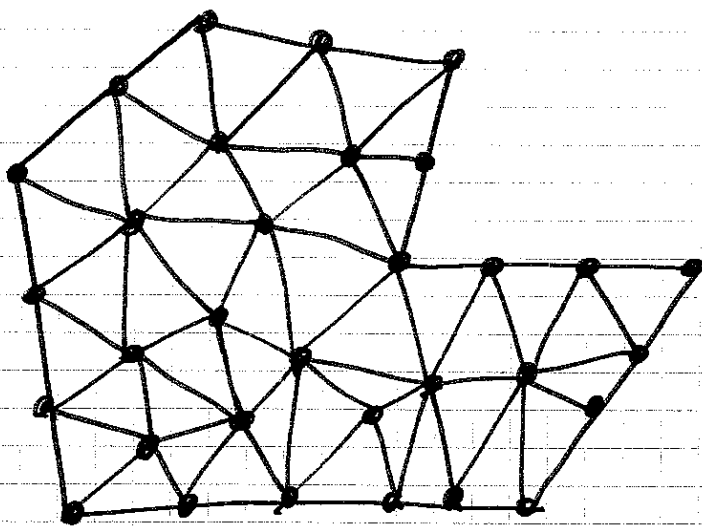


Figure 1. Maillage simplicial d'un ouvert borné  $\Omega$  du plan  $\mathbb{R}^2$  à frontière polygonale

De plus, les triangles  $K \in \mathcal{T}^2$  (noter l'indice 2 qui indique que les triangles sont des composants géométriques à deux dimensions d'espace) ne sont pas disposés n'importe comment

- Si  $K = (A, B, C)$  est un triangle du plan, les trois sommets  $A, B, C$  sont les points extrêmes du triangle et les arêtes  $\alpha = ]B, C[$ ,  $\beta = ]C, A[$  et  $\gamma = ]A, B[$  composent le bord du triangle !  
on a :

$$(2.2) \quad \partial K = \{ ]A, B[, ]B, C[, ]C, A[ \} \subset \mathcal{E}^1, \quad K \in \mathcal{E}^2,$$

introduisant en avance de phase l'ensemble  $\mathcal{E}^1$  des arêtes du maillage simplicial  $\mathcal{T}$ .

- La condition d'intersection entre deux triangles <sup>9-5</sup>  $K$  et  $L$  de la famille  $\mathcal{T}^2$  caractérise la propriété de maillage simplicial. On demande à la famille  $\mathcal{T}^2$  de triangles de vérifier la condition

$$(2.3) \quad \overline{K \cap L} = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sommet de } K \text{ et de } L \\ \text{une arête de } K \text{ et de } L \\ L = K \end{cases}, \quad K, L \in \mathcal{T}^2.$$

Ainsi les configurations géométriques représentées Figure 2 sont incompatibles de la condition (2.3), on a eu effet, pour la figure de gauche,  $\overline{K \cap L}$  est une arête de  $K$  mais pas une arête de  $L$  et pour la figure de droite,  $\overline{K \cap L}$  est un sommet de  $K$ , mais pas un sommet de  $L$ .

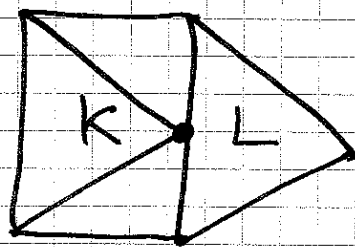
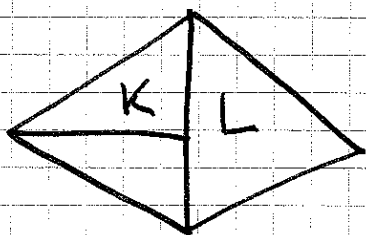


Figure 2 Configurations interdites pour l'intersection de triangles d'un maillage simplicial

• La condition d'intersection (2.3) permet donc de définir l'ensemble  $\mathcal{C}^0$  des sommets du maillage  $\mathcal{C}$  et l'ensemble  $\mathcal{C}^1$  des arêtes de ce même maillage. Ce sont les intersections, de dimensions respectives zéro et un de deux triangles arbitraires de la collection  $\mathcal{C}$ . Disposant des trois ensembles  $\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2$ , ils définissent une structure de complexe simplicial. Nous n'entrons pas ici dans la rigueur des définitions rigoureuses de ces notions topologiques, au bénéfice de quelques remarques, "évidentes" à la vue de la Figure 1.

• L'ensemble  $\mathcal{C}^1$  des arêtes peut être vu comme un sous ensemble du produit cartésien  $\mathcal{C}^0 \times \mathcal{C}^0$  c'est à dire un graphe dans l'ensemble de sommets. Une arête  $\alpha = ]A, B[$  peut être considéré comme allant "de A à B" ou comme allant "de B à A". et on la notera  $(A, B)$  dans le premier cas et  $(B, A)$  dans le second. On choisit une orientation de l'arête  $\alpha = ]A, B[$  en adoptant l'un des couples  $(A, B)$  (pour fixer les idées) et en "éliminant" le couple  $(B, A)$ . on définit alors un vecteur tangent unitaire  $\tau_\alpha$  par

$$(2.4) \quad \tau_\alpha = \frac{1}{|AB|} \vec{AB}.$$

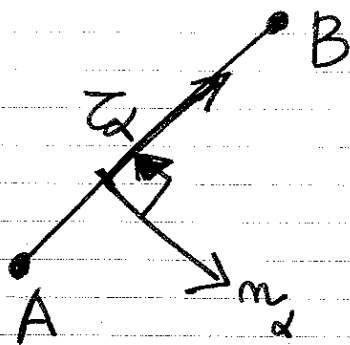


Figure 3 Normale  $n_\alpha$  "naturelle" à l'arête orientée  $\alpha$  de A vers B; le vecteur tangent  $z_\alpha = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$  est issu de  $n_\alpha$  par une rotation d'angle  $+\pi/2$ .

Nous insistons sur le fait que si les coordonnées  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  des sommets A et B sont connues, le vecteur  $z_\alpha$  se calcule sans difficulté:

$$(2.5) \quad z_\alpha = \frac{1}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} (x_B - x_A, y_B - y_A).$$

La normale  $n_\alpha$  à l'arête  $\alpha$  (hors sens orienté de A vers B, voir la Figure 3) est telle que  $z_\alpha$  est issue de  $n_\alpha$  par un angle  $+\pi/2$ . On a donc facilement

$$(2.6) \quad n_\alpha = \frac{1}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} (y_B - y_A, -(x_B - x_A))$$

- Le bord  $\partial\alpha$  de l'arête  $\alpha = ]A, B[$  est composé des deux sommets A et B. On a donc

$$(2.7) \quad \partial\alpha \subset \mathcal{V}^0, \quad \alpha \in \mathcal{V}^1.$$



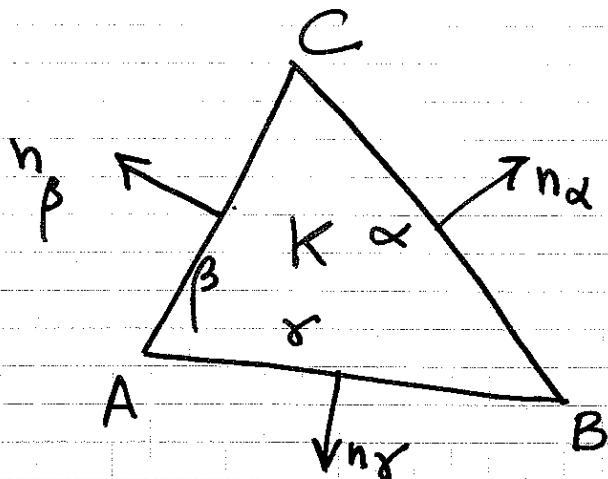


Figure 4. Un triangle  $K = (A, B, C)$  appartenant à  $\mathcal{T}^2$ .  
 Son bord  $\partial K$  est composé des trois arêtes  
 $\alpha = ]B, C[$ ,  $\beta = ]C, A[$ ,  $\gamma = ]A, B[$  dont les  
 normales  $n_\alpha$ ,  $n_\beta$  et  $n_\gamma$  pointent vers l'extérieur  
 du triangle.

- Un triangle  $K \in \mathcal{T}^2$  arbitraire du maillage de  $\Omega$  finit naturellement trois sommets  $(A, B, C) \in \mathcal{T}^0$ ,  $\mathcal{T}^0 \times \mathcal{T}^0$  et trois arêtes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{T}^1$ . Son bord  $\partial K$  est par convention composé de ces trois arêtes

$$(2.8) \quad \partial K \subset \mathcal{T}^1, \quad K \in \mathcal{T}^2.$$

- La normale extérieure  $n^K$  au triangle  $K$  est définie pour  $x$  appartenant au bord :

$$(2.9) \quad \partial K \ni x \mapsto n^K(x) \in \mathbb{R}^2, \quad |n^K(x)| = 1.$$

Si  $d$  est une arête composant le bord de  $K$ , la normale  $n_d$  relative à cette arête peut être identifiée à la normale  $n^K$  extérieure au triangle.

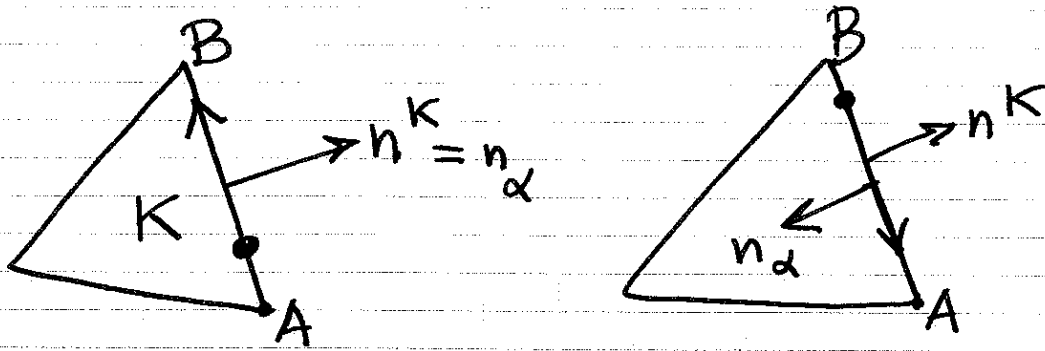


Figure 5 Inférence entre un triangle  $K \in \mathcal{T}^2$  et une arête  $\alpha \in \mathcal{T}^1$  de son bord:  $\alpha \subset \partial K$ . Dans le premier cas (à gauche), l'arête  $\alpha$  est orientée de A vers B et  $n_\alpha = n^K$ ; on dit que le nombre d'inférence  $\varepsilon_\alpha^K$  vaut +1. Dans le second cas (à droite), l'arête  $\alpha$  est orientée de B vers A et  $n_\alpha = -n^K$  et le nombre d'inférence  $\varepsilon_\alpha^K$  vaut -1.

Si l'orientation de  $\alpha$  est la même que celle du bord du triangle; on a dans ce cas

$$(2.10) \quad \varepsilon_\alpha^K = +1, \quad \alpha \subset \partial K \text{ de même orientation que } K \in \mathcal{T}^2.$$

On peut aussi avoir opposition entre l'orientation "naturelle" (dans le sens contraire des aiguilles d'une montre) de  $\partial K$  et l'orientation  $\alpha$  de l'arête, comme l'illustre la figure 5 "droite". On a alors

$$(2.11) \quad \varepsilon_\alpha^K = -1, \quad \alpha \subset \partial K \text{ d'orientation contraire à } K \in \mathcal{T}^2$$

On a dans tous les cas

$$(2.12) \quad m_\alpha = \varepsilon_\alpha^K m^K, \quad \alpha \subset \partial K, \quad K \in \mathcal{T}^2, \quad \alpha \in \mathcal{E}^1$$

Il peut être commode de poser

$$(2.13) \quad \varepsilon_\alpha^K = 0, \quad \alpha \not\subset \partial K$$

Si l'arête  $\alpha$  n'appartient pas au bord de  $K$

- Si l'arête  $\alpha$  est intérieure au domaine  $\Omega$ , alors elle est frontière d'un élément  $G_\alpha$  "à sa gauche" telle que  $\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$  ont même orientation et d'un

$$(2.14) \quad \varepsilon_\alpha^{G_\alpha} = +1, \quad \alpha \in \mathcal{E}^1, \text{ intérieure,}$$

et d'un élément  $D_\alpha$  "à sa droite" tel que  $\alpha$  et  $D_\alpha$  sont d'orientations opposées:

$$(2.15) \quad \varepsilon_\alpha^{D_\alpha} = -1, \quad \alpha \text{ intérieure, } \alpha \in \mathcal{E}^1.$$

La figure 6 illustre ces notations.

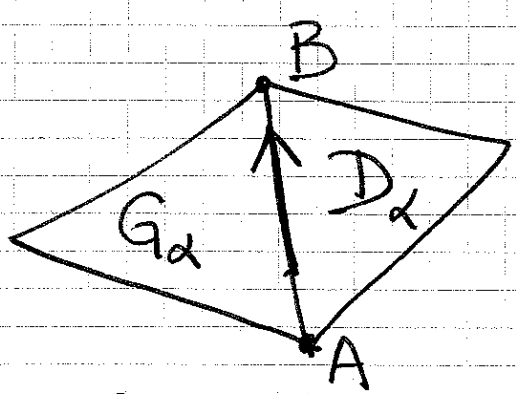


Figure 6 Cobord  $(G_\alpha, D_\alpha)$  de l'arête intérieure  $\alpha$

Les deux triangles  $G_\alpha$  et  $D_\alpha$  tels que  $\alpha$  en une partie de leur bord définissent le cobord de l'arête  $\alpha$  : on a

$$(2.16) \quad \partial^c \alpha = (G_\alpha, D_\alpha), \quad \alpha \text{ intérieure, } \alpha \in \mathcal{C}$$

- Si l'arête  $\alpha$  est au bord du domaine  $\Omega$ , on choisit son orientation de sorte que  $n_\alpha$  coïncide avec la normale  $n$  ext $\acute{e}$ .

Neuve au domaine  $\Omega$

(Figure 7) Il n'y a alors qu'un triangle

$G_\alpha$  de sorte que  $\alpha \subset \partial G_\alpha$ ; le cobord

$\partial^c \alpha$  ne comporte que le triangle  $G_\alpha$  :

$$(2.17) \quad \partial^c \alpha = G_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{C}^1, \quad \alpha \subset \partial \Omega.$$

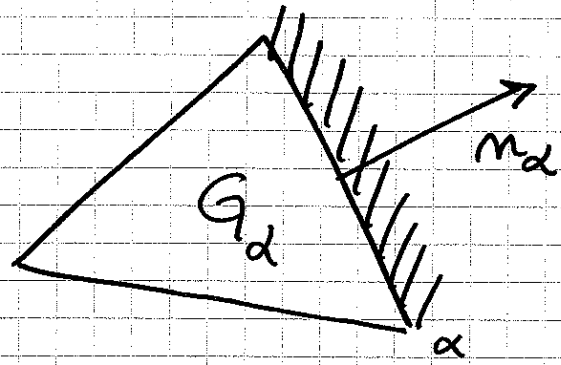


Figure 7 Arête  $\alpha$  au bord de l'ouvert  $\Omega$ .

### ③ Maillage tridimensionnel tétraédrique.

- Si  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , on le suppose ici de frontière polygonale. Un maillage simplicial  $\mathcal{C}$  de l'ouvert  $\Omega$  est maintenant un ensemble  $\mathcal{C}^3$  de tétraèdres de sorte que la réunion de leurs adhérences recouvre entièrement  $\Omega$ .

$$(3.1) \quad \overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}^3} \overline{K}$$

- La condition d'intersection du maillage simplicial  $\mathcal{T}$  s'écrit maintenant

$$(3.2) \quad \overline{K} \cap \overline{L} = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sommet de } K \text{ et de } L \\ \text{une arête de } K \text{ et de } L \\ \text{une face de } K \text{ et de } L \\ K = L \end{cases}, \quad K, L \text{ tétraèdres} \in \mathcal{T}^3.$$

Les sommets, arêtes, faces, notions intrinsèques a priori à chaque tétraèdre, sont illustrées Figure 8. Cette condition d'intersection permet de définir les sommets (ensemble  $\mathcal{T}^0$ ), les arêtes (ensem

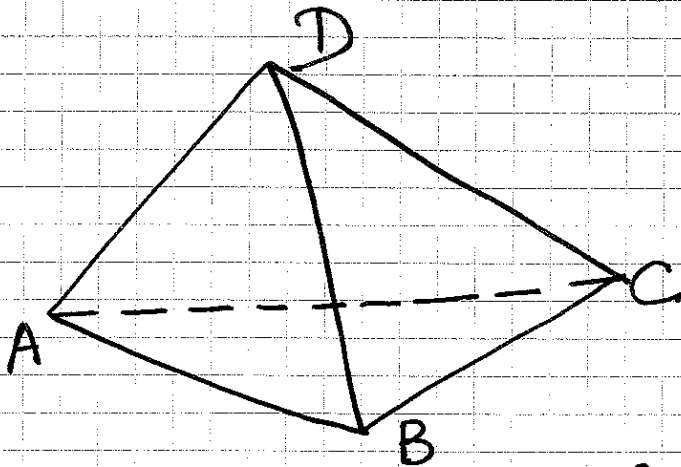


Figure 8 Tétraèdre  $K \in \mathcal{T}^3$ . Il a quatre sommets  $A, B, C, D$ , six arêtes  $AB, BC, CA, AD, BD, CD$  et quatre faces  $ABC, BCD, CDA, ABD$ .

ble  $\mathcal{T}^1$ ), les faces (ensemble  $\mathcal{T}^2$ ) du maillage  $\mathcal{T}$ .

- Le bord d'une arête est toujours composé de deux sommets

$$(3.3) \quad \partial \alpha \subset \mathcal{T}^0, \quad \alpha \in \mathcal{T}^1,$$

le bord d'une face est formé de trois arêtes

$$(3.4) \quad \partial f \subset \mathcal{T}^1, \quad f \in \mathcal{T}^2$$

et le bord d'un tétraèdre contient quatre faces (figure 8):

$$(3.5) \quad \partial K \subset \mathcal{T}^2, \quad K \in \mathcal{T}^3.$$

- Une face  $(A, B, C) \in \mathcal{T}^2$  définit un plan, donc deux orientations. On a par exemple

$$(3.6) \quad n_f = \frac{1}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|} \vec{AB} \times \vec{AC}$$

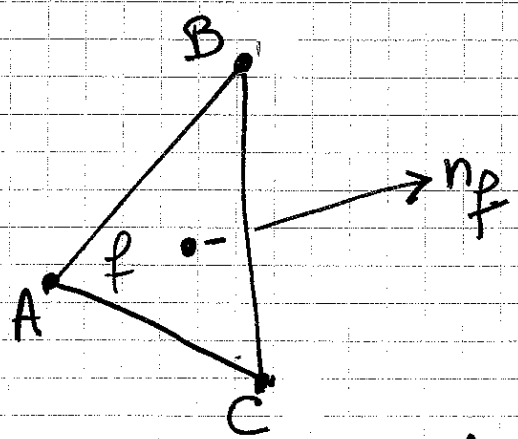


Figure 9 Normale  $n_f$  à la face triangulaire  $f$ .

et le calcul de ce vecteur normal n'effe aucune difficulté. Si on change l'orientation de  $(A, B, C)$ , la normale  $n_f$  est changée en le vecteur opposé. Par convention si la facette  $f$  est incluse dans le bord de  $\Omega$ , on suppose que  $n_f$  et  $n(\partial\Omega)$  (normale extérieure au domaine  $\Omega$ ) coïncident. Dans ce cas il existe un seul tétraèdre  $G_f$  tel que  $f \subset \partial G_f$  et le cobord  $\partial_f^c$  de la facette  $f$  est composé du seul tétraèdre  $G_f$ :

$$(3.7) \quad \partial_f^c = G_f, \quad f \subset \partial G_f, \quad f \in \mathcal{T}^2, \quad f \subset \partial\Omega.$$

- Si la face  $f$  est intérieure au domaine  $\Omega$ , il existe deux tétraèdres  $G_f$  et  $D_f$  tels que la face  $f$  appartient à leur bord; ils forment par définition le cobord de cette face (Figure 10):

$$(3.8) \quad \partial_f^c = \{G_f, D_f\}, \quad f \subset \partial G_f \cap \partial D_f, \quad f \in \mathcal{T}^2, \quad f \not\subset \partial\Omega.$$

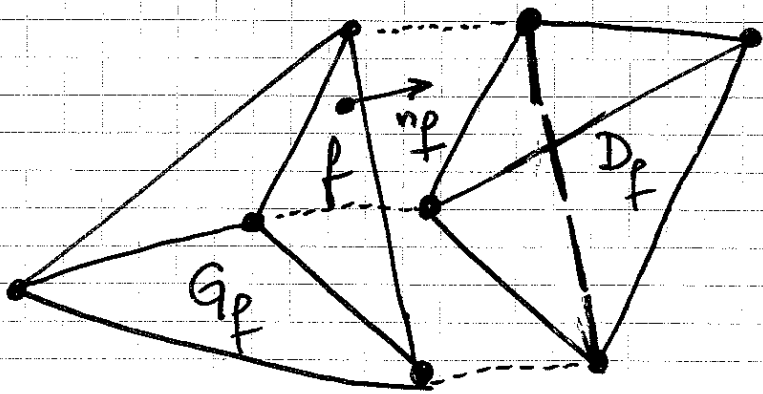


Figure 10 Cobord  $\partial_f^c = \{G_f, D_f\}$  d'un triangle  $f \in \mathcal{T}^2$  intérieur au domaine.

Par définition, la normale extérieure au tétraèdre  $G_f$  (à "gauche" de la normale  $n_f$ ) coïncide avec la normale  $n_f$  et le nombre d'incidence correspondant vaut  $+1$  9-15

$$(3.9) \quad \varepsilon_f^{G_f} = +1, \quad f \in \mathcal{O}^2, \quad f \subset \partial G_f.$$

Par construction même, la normale extérieure au tétraèdre  $D_f$  (à "droite" de la normale  $n_f$ , voir la figure 10 qui en donne une représentation éclatée) est opposée à la normale  $n_f$ ; le nombre d'incidence associé vaut  $-1$ :

$$(3.10) \quad \varepsilon_f^{D_f} = -1, \quad f \in \mathcal{O}^2, \quad f \subset \partial D_f.$$

ou a donc

$$(3.11) \quad m^K = \varepsilon_f^K m_f, \quad f \in \mathcal{O}^2, \quad K \in \partial^c f \subset \mathcal{O}$$

#### ④ Interpolation de Lagrange sur $\mathbb{R}$

- On se donne deux réels  $a < b$  et une collection de points intermédiaires  $x_1, \dots, x_{N-1}$ , comme à la relation (1.2). Pour chacun des points  $x_0 = a, x_1, \dots, x_j, \dots, x_N = b$ , on se donne des nombres réels  $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N$ . On cherche une fonction  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue de



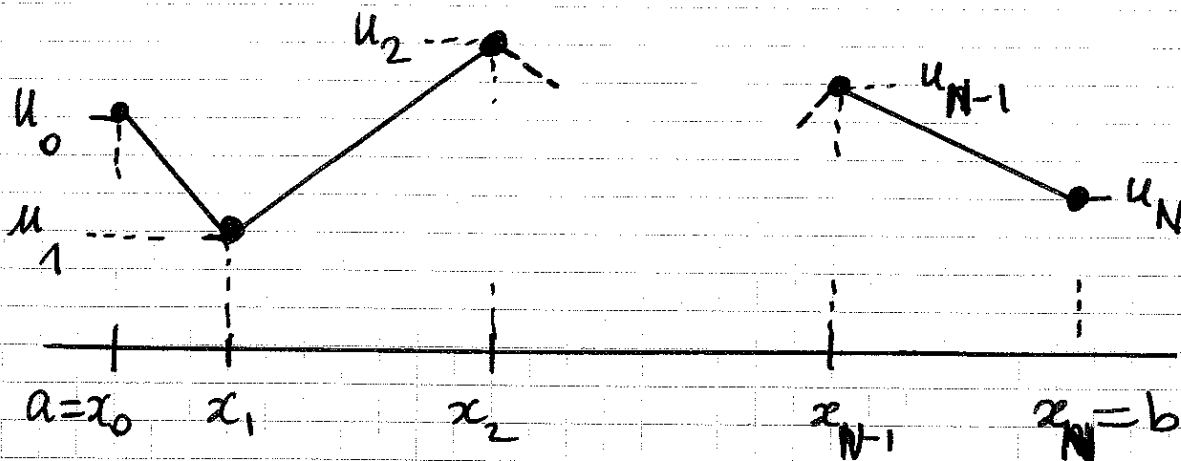


Figure 11 Interpolation affine par morceaux relative au maillage  $\mathcal{C}^0 = \{a, x_1, \dots, x_{N-1}, b\}$  de l'intervalle  $]a, b[$ .

soit que

$$(4.1) \quad u(x_j) = u_j, \quad \forall x_j \in \mathcal{C}^0.$$

Il existe de nombreuses façons de résoudre ce problème, la plus simple consiste à choisir une fonction  $u$  affine par morceaux dans chaque intervalle  $]x_j, x_{j+1}[ \in \mathcal{C}^1$ .

- on fixe  $j$  dans ce paragraphe. Un point  $x$  arbitraire de ce paragraphe peut s'écrire comme barycentre des points  $x_j$  et  $x_{j+1}$ :

$$(4.2) \quad x = (1-\theta)x_j + \theta x_{j+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad x \in [x_j, x_{j+1}]$$

On sait que une fonction affine (notée  $u_{j+1/2}$  par

référence aux deux sommets  $x_j$  et  $x_{j+1}$ ) contourne le barycentre (preuve laissée au lecteur!). On a donc pour une telle fonction

$$(4.3) \quad \begin{cases} u_{j+1/2}(x) = (1-\theta) u_{j+1/2}(x_j) + \theta u_{j+1/2}(x_{j+1}), \\ x \text{ donné par la relation (4.2)} \end{cases}$$

Comme on cherche  $u$  continue telle que

$$(4.4) \quad u(x) = u_{j+1/2}(x), \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq N-1$$

telle que (4.1) a lieu, on a nécessairement

$$(4.5) \quad u_{j+1/2}(x_j) = u_j \quad \text{et} \quad u_{j+1/2}(x_{j+1}) = u_{j+1}$$

• Donc

$$(4.6) \quad u(x) = (1-\theta) u_j + \theta u_{j+1} \quad \text{si} \quad x = (1-\theta)x_j + \theta x_{j+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

on remplit l'espace entre les points  $(x_j, u_j)$  par des segments de droites (Figure 11). on peut aussi expliciter par une formule les relations (4.2) et (4.6):

$$(4.7) \quad u(x) = u_j + \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} (u_{j+1} - u_j), \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

• on préfère introduire des fonctions  $\varphi_j$ ,  $0 \leq j \leq N$  affines par morceaux, continues sur  $[a, b]$ , de façon à écrire la fonction  $u$  (relation (4.7)) à l'aide des nombre  $u_j$  et des fonctions  $\varphi_j$ :

$$(4.8) \quad u(x) = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j(x), \quad a \leq x \leq b$$

concrètement, sans référence à la variable  $x$ :

$$(4.9) \quad u = \sum_{j=0}^N u_j \varphi_j.$$

- On introduit pour cela une "fonction chapeau"  $\varphi_j$  de sorte que

$$(4.10) \quad \varphi_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est illustrée figure 12. D'un point de vue algébrique, on a:

$$(4.11) \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

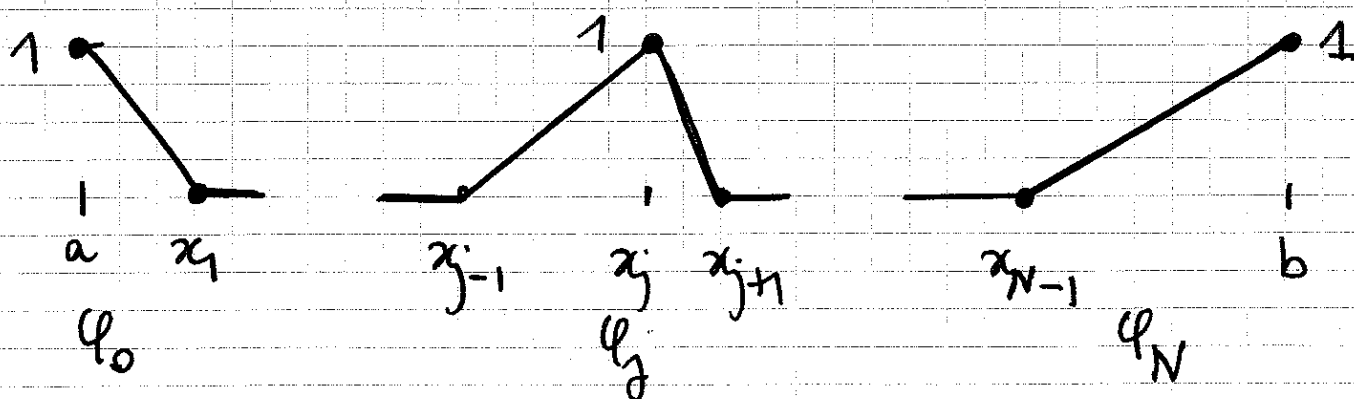


Figure 12. Fonctions de base  $\varphi_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ .

ou a bien clairement

$$(4.12) \quad \varphi_j \in \mathcal{C}^0([a, b])$$

et compte tenu de la continuité, on laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$(4.13) \quad \varphi_j \in H^1(a, b).$$

### 5 Quelques éléments pour l'interpolation $P_3$ de Hermite

- La solution proposée au paragraphe précédent n'est pas la seule. On peut aussi construire  $u$  de classe  $\mathcal{C}^1$  (continûment dérivable) sur  $[a, b]$  de façon à vérifier les relations (4.1) et des relations supplémentaires aux points (voir la figure 13):

$$(5.1) \quad \frac{du}{dx}(x_j) = p_j, \quad 0 \leq j \leq N.$$

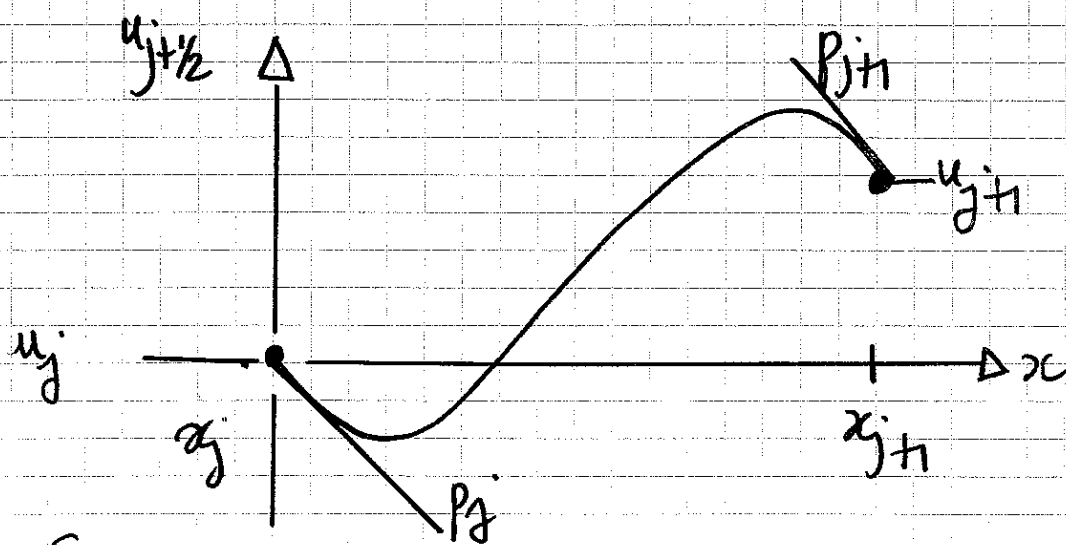


Figure 13

Interpolation  $P_3$  de Hermite dans l'intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ .

on construit  $u$  par morceaux  $u_{j+1/2}$  dans l'intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$  (relation (4.4)) mais, au lieu de la simple relation (4.3), on suppose

(5.2)  $u_{j+1/2} \in P_3$ , espace des polynômes de  $d^0 \leq 3$  de façon à garantir les conditions

$$(5.3) \begin{cases} u_{j+1/2}(x_j) = u_j, & u_{j+1/2}(x_{j+1}) = u_{j+1}, \\ \frac{d}{dx} u_{j+1/2}(x_j) = p_j, & \frac{d}{dx} u_{j+1/2}(x_{j+1}) = p_{j+1}. \end{cases}$$

- d'explicitation des relations (5.3) est un exercice élémentaire laissé au lecteur. Si on pose

$$(5.4) \begin{cases} \psi_1(\theta) = (\theta-1)^2(1+2\theta) \\ \psi_2(\theta) = \theta^2(3-2\theta) \\ \psi_3(\theta) = \theta(\theta-1)^2 \\ \psi_4(\theta) = (\theta-1)\theta^2 \end{cases}$$

et qu'on suppose  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  paramétré par  $\theta \in [0, 1]$  à l'aide de la relation (4.2), on a:

$$(5.5) \quad u_{j+1/2}(x) = u_j \psi_1(\theta) + u_{j+1} \psi_2(\theta) + (x_{j+1} - x_j) [p_j \psi_3(\theta) + p_{j+1} \psi_4(\theta)]$$

- \* Un intéressant problème est alors de déterminer (au mieux!) les pentes  $p_j$  de sorte que  $u$  définie par (4.4)(5.5) soit de classe  $C^2$  ou renvoie le lecteur à la notion de splines.

## ⑥ Rappel sur les coordonnées barycentriques

9.21

- On se donne trois points  $A, B, C$  du plan. Alors tout point  $M$  du plan peut s'écrire comme le barycentre des points  $A, B, C$  affectés des coefficients  $\lambda_A(M)$ ,  $\lambda_B(M)$  et  $\lambda_C(M)$ :

$$(6.1) \quad M = \lambda_A(M)A + \lambda_B(M)B + \lambda_C(M)C$$

où par convention, la somme des coefficients  $\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C$  vaut l'unité:

$$(6.2) \quad \lambda_A(M) + \lambda_B(M) + \lambda_C(M) = 1.$$

- Le calcul explicite des  $\lambda_S(M)$  ( $S=A, B, C$ ) est facile; nous le verrons rapidement ici. On suppose connues les coordonnées  $x_S, y_S$  des trois points du triangle ( $A, B, C$ ) ainsi que les coordonnées  $(x, y)$  de  $M \in \mathbb{R}^2$ . Les fonctions  $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$  sont alors solution du système linéaire

$$(6.3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \\ \lambda_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice de ce système vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$$

$$= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

$$= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{k} \quad \text{où } \vec{k} \text{ est le vecteur normal}$$

au plan de l'étude. Donc ce déterminant est non nul si et seulement si  $\vec{AB} \times \vec{AC} \neq 0$ , i.e. A, B, C ne sont pas alignés.

- La résolution explicite du système (6.3) peut s'effectuer par la méthode des multiplicateurs:

$$\begin{cases} \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1 \\ x_A \lambda_A + x_B \lambda_B + x_C \lambda_C = x \\ y_A \lambda_A + y_B \lambda_B + y_C \lambda_C = y \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c|c} -x_C & -y_C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} (x_A - x_C) \lambda_A + (x_B - x_C) \lambda_B = x - x_C & | \quad y_B - y_C \\ (y_A - y_C) \lambda_A + (y_B - y_C) \lambda_B = y - y_C & | \quad -(x_B - x_C) \end{cases}$$

$$(\vec{CA} \times \vec{CB}) \lambda_A = (\vec{CA} \times \vec{CB})$$

$$\vec{CA} \times (\vec{CA} + \vec{AB}) = \vec{CA} \times \vec{AB} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

$$(6.4) \quad \lambda_A(M) = \frac{(y_B - y_C)(x - x_C) - (x_B - x_C)(y - y_C)}{(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)}$$

Les autres coordonnées barycentriques s'obtiennent à partir de la relation (6.4) par permutation circulaire des lettres (A, B, C).

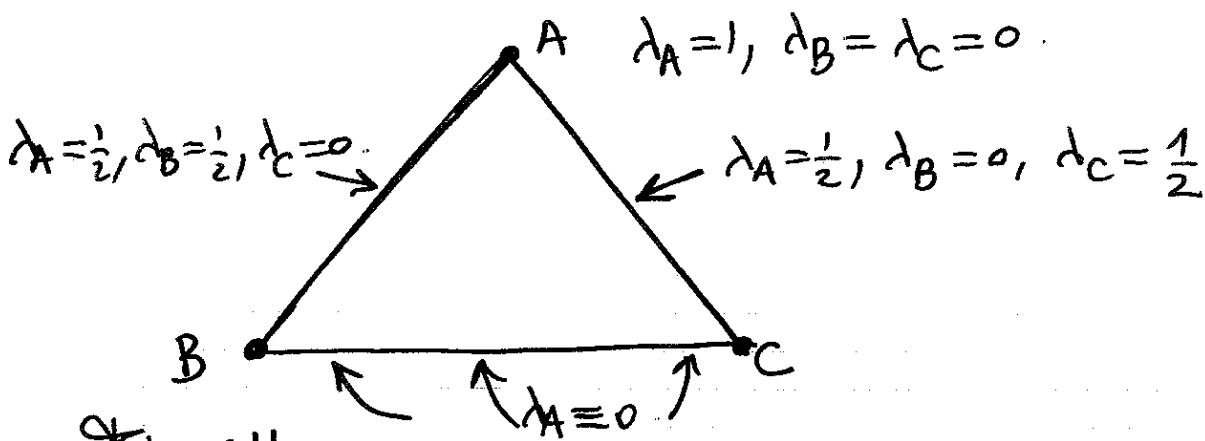


Figure 14

Coordonnées barycentriques de quelques points particuliers.

- Les points intérieurs au triangle  $(ABC)$  ont des coordonnées barycentriques qui vérifient

$$(6.5) \quad 0 \leq \lambda_A(M), \lambda_B(M), \lambda_C(M) \leq 1, \quad M \in \text{triangle}(A, B, C).$$

Les points de la droite  $(B, C)$  vérifient  $\lambda_A(M) = 0$  (voir la figure 14) et une équation de la forme

$$(6.6) \quad \lambda_A(M) = \text{cte}, \quad M \in \mathbb{R}^2$$

détermine complètement une parallèle à la droite  $BC$ .

## ⑦ Élément $P_1$ de Lagrange dans le plan.

- Nous reprenons la question générale de l'interpolation, abordée au paragraphe 4 de cette leçon. Nous travaillons maintenant dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , plus précisément dans l'ouvert  $\Omega$ , équipé d'un maillage simplicial  $\mathcal{T}$  (voir le paragraphe 2). Nous supposons données des valeurs (réelles)  $u_S$  aux sommets ( $S \in \mathcal{T}^0$ )



de maillage:

$$(7.1) \quad \mathcal{T}^0 \ni S \mapsto u_S \in \mathbb{R}.$$

Nous cherchons une "entête les sommets", i.e nous cherchons à évaluer, construire une fonction (nous verrons à la leçon suivante qu'elle est en fait continue)  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que

$$(7.2) \quad u(S) = u_S, \quad \forall S \in \mathcal{T}^0.$$

- Nous commençons à poser le problème dans un simple triangle  $K \in \mathcal{T}^2$ . On se donne donc  $u_A, u_B, u_C$  valeurs réelles; on cherche  $u^K : K \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que les valeurs de la fonction  $u^K$  coïncident avec les  $u_S$  pour  $S \in \{A, B, C\}$ , c'est à dire sommet du triangle  $K$ :

$$(7.3) \quad u^K(S) = u_S, \quad S \in \{A, B, C\}, \quad K = (A, B, C).$$

Nous supposons de plus que

$$(7.4) \quad u^K \text{ est polynomiale de } d^0 \leq 1$$

i.e  $u^K \in P_1$ , en notant  $P_1$  l'espace des polynômes de degré (total) inférieur ou égal à 1.

- Nous désignons par  $(K, \Sigma, P_1)$  le triplet formé du triangle  $K$ , de l'ensemble  $\Sigma$  de degrés de liberté, ou formes linéaires agissant sur les fonctions (continues) définies sur  $K$ :

$$(7.5) \quad \Sigma = \{\delta_S, S = A, B, C\}$$

où  $\delta_S$  est la masse de Dirac au sommet  $S$ :

$$(7.6) \quad u \mapsto \langle \delta_S, u \rangle = u(S) \in \mathbb{R}.$$

En fin,  $P_1$  est l'espace d'interpolation, ie

$$(7.7) \quad u \in P_1.$$

- Un tel triplet  $(K, \Sigma, P_1)$  s'appelle élément fini lorsqu'il satisfait la propriété d'unisolvance:

$$(7.8) \quad \forall d_S \in \mathbb{R}, \exists ! u \in P_1, \langle \delta_S, u \rangle = d_S, \forall S = A, B, C$$

Pour toute valeur  $d_S$  donnée aux sommets  $S$  du triangle (ie pour toute famille  $d_A, d_B, d_C$  de coefficients réels), il existe une et une seule fonction  $u$  appartenant à l'espace d'interpolation (ici  $P_1$ ) de sorte que

$$(7.9) \quad u(S) = d_S, \quad \forall S \in \{A, B, C\} \text{ sommet du triangle}$$

- La preuve de cette propriété relève de l'algèbre linéaire élémentaire. Soit  $\gamma$  l'application

$$(7.10) \quad P_1 \ni u \mapsto \gamma(u) = (u(A), u(B), u(C)) \in \mathbb{R}^3.$$

L'application  $\gamma$  est linéaire (puisque les trois formes de Dirac  $u \mapsto u(S)$  le sont), envoyée l'espace  $P_1$ , qui est de dimension 3, puisque tout polynôme de degré  $\leq 1$  dans  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire sous

la forme

$$(7.11) \quad p(x,y) = a + bx + cy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . La propriété d'unicité (7.8) revient à dire que  $\gamma$  est bijection. Or compte tenu de l'égalité des dimensions, ie dim  $P_1 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ , il suffit de démontrer que  $\gamma$  est injective, c'est que son noyau ker  $\gamma$  est réduit à 0. Il suffit de résoudre le système d'équations

$$(7.12) \quad u(A) = 0, \quad u(B) = 0, \quad u(C) = 0, \quad u \in P_1$$

et montrer qu'il a pour seule solution  $u \equiv 0$ .

- Si  $u \in P_1$ , elle est affine, donc de la forme (7.11) et le système (7.12) revient à chercher  $a, b, c$  de sorte que

$$(7.13) \quad \begin{cases} a + x_A b + y_A c = 0 \\ a + x_B b + y_B c = 0 \\ a + x_C b + y_C c = 0 \end{cases}$$

À une transposition près, la matrice du système (7.13) est analogue à celle du système (6.3), laquelle est inversible si les points  $A, B, C$  ne sont pas alignés. Donc la seule solution de (7.13) est  $a = b = c = 0$  et la propriété est établie.

- on peut expliciter le polynôme  $u^k \in P_1$  tel que (7.3) a lieu. on remarque d'abord que la coordonnée barycentrique  $\lambda_S^k$  relative au triangle  $(A, B, C) \stackrel{\equiv k}{=} (S = A, B \text{ ou } C)$  vérifie

$$(7.14) \quad \lambda_S^k(S') = 1 \text{ si } S' = S, \text{ sinon } 0.$$

Donc la fonction  $u^k$  définie par

$$(7.15) \quad u^k = \sum_{S \text{ sommet de } K} u_S \lambda_S^k$$

est affine (chacune des fonctions  $\lambda_S^k$  est affine, voir par exemple la relation (6.4)) et vérifie bien la relation (7.3). C'est donc la solution du problème (7.8), explicitée simplement à l'aide des coordonnées barycentriques.

- Les fonctions  $(\lambda_S^k)_{S \in \mathcal{B}^0(K)}$  forment une base de l'espace fini  $(K, \Sigma, P_1)$ . La relation (7.14) peut encore s'écrire

$$(7.16) \quad \langle \delta_{S'}, \lambda_S^k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } S' = S \\ 0 & \text{si } S' \neq S \end{cases}$$

Toute fonction  $u^k \in P_1$  se développe de façon unique sous la forme

$$(7.17) \quad u^k = \sum_{S \text{ sommet de } K} \alpha_S \lambda_S^k.$$

Les coefficients  $\alpha$  sont les "degrés de liberté" relative à la famille  $\Sigma$ .  $u^k(S) = \alpha_S$  pour tout sommet  $S$  du triangle  $K$ .