le cnam

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 03

Espaces de Sobolev vectoriels (i)

Introduction

Introduction élémentaire aux distributions

La masse de Dirac n'est pas une fonction

Dérivation au sens des distributions

François Dubois

octobre 2005, 19 pages

CVM (3)

ch (II) Espaces de Sobolev vectoriels (i)

Cours du 19 octobre 2005

(1) Introduction.

- Afin d'établir des résultats mathématiques d'existence et d'unicité, il est bon de se placer dans des espaces "sympathiques" pour énoncer de tels résultats. Notre choix pour ce cours est de travailler dans des espaces de Hilbert. De tels espaces sont munis d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$ comme dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ de la géométrie élémentaire. Nous avons

(1.1) $\qquad H \times H \ni (x, y) \longmapsto (x, y)_H \in \mathbb{R}$

où H désigne l'espace de Hilbert, avec une notation quasi ubiquïe de parenthésage pour désigner le produit scalaire de deux éléments x et y de l'espace H.

- Un exemple de tel espace est l'espace $L^2(0,\pi)$ des fonctions de carré intégrable sur $[0,\pi]$:

(1.2) $\qquad L^2(0,\pi) = \{ v : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \int_0^\pi v^2(t)\,dt < \infty \}$

Le produit scalaire associé s'écrit

(1.3) $\qquad (u,v)_0 \equiv \int_0^\pi u(t)\,v(t)\,dt, \quad u, v \in L^2(0,\pi)$

on peut vérifier sans difficulté que la famille le u_k de fonctions défini par

(1.4) $$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(kx),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ 0\leq x\leq\pi$$

constitue une famille orthonormale de $L^2[0,\pi]$:

(1.5) $$(u_k, u_\ell)_0 = \delta_{k,\ell}\,.$$

- Les espaces de Hilbert ont ceci de remarquable qu'on peut y faire de la géométrie comme dans $\mathbb{R}^3$; on dispose de la "longueur" de $x\in H$:

(1.6) $$\|x\|_H = \sqrt{(x,x)_H}\quad,\ x\in H$$

et la distance entre deux points (deux vecteurs, le plus souvent deux fonctions) de H est donnée par :

(1.7) $$\mathrm{dist}_H(x,y) = \|x-y\|_H\ ,\quad x,y\in H.$$

- Le produit scalaire d'un espace de Hilbert H (sur le corps $\mathbb{R}$ des réels ; toute cette théorie se généralise sans difficulté majeure au corps $\mathbb{C}$ des complexes) est symétrique :

(1.8) $$(y,x)_H = (x,y)_H\ ,\quad x,y\in H\ ,$$

bilinéaire ;

(1.9) $$\begin{cases}(x,\lambda y+\mu z)_H = \lambda\,(x,y)_H + \mu\,(x,z)_H\\ (\lambda x+\mu y, z)_H = \lambda(x,z)_H + \mu\,(y,z)_H\end{cases}$$

et défini positif :

(1.10) $\quad (x,x)_H \geq 0 \quad , \forall x \in H$

(1.11) $\quad \left((x,x)_H = 0 \right) \Rightarrow \left(x = 0_H \right)$.

De plus, même si un espace de Hilbert est en général de dimension infinie, comme $L^2(0,\pi)$ proposé plus haut, pour lequel la famille de Fourier [Joseph Fourier (1768-1830)] montre l'existence d'une famille libre de vecteurs contenant une infinité d'éléments, on dispose d'arguments permettant d'établir la convergence.

- De manière précise, une suite de Cauchy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est telle que tous ses termes sont arbitrairement proches à condition d'aller assez loin dans la suite :

(1.12) $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k, \ell \geq N, \ \|x_k - x_\ell\|_H < \varepsilon$.

on demande à un espace de Hilbert d'être <u>complet</u>, c'est à dire que toute suite de Cauchy $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers $x \in H$:

(1.13) $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - x\|_H < \varepsilon$.

- Alors on se rend compte sans peine pour l'exemple $L^2(0,\pi)$ que toute série de la forme

(1.14) $\quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k \quad , \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$

est effectivement convergente (exercice !) et définit de ce fait un unique $x \in H$.

- Dans le cas général d'un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^d$ ($d=1,2$ ou 3 en pratique), souvent connexe (d'un seul morceau) et de frontière $\partial\Omega$ régulière, l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions $v : \Omega \to \mathbb{R}$ dont l'intégrale du carré est finie, ie

(1.15) $\quad L^2(\Omega) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R}, \int_\Omega |v(x)|^2 \, dx < \infty \}$

est muni du produit scalaire

(1.16) $\quad (u,v)_0 = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \ ; \ u, v \in L^2(\Omega)$

donc de la norme

(1.17) $\quad \|u\|_0 \equiv \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2 dx} \ , \ u \in L^2(\Omega)$

qui en fait un espace de Hilbert.

- Pour aller plus loin, et définir l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ des fonctions scalaires dérivables, qui est encore un espace de Hilbert, il nous faut changer de regard sur la dérivation et introduire la notion de distribution, et de dérivation au sens des distributions.

(2) Introduction élémentaire aux distributions

- La première remarque est d'abandonner le point de vue $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ pour une fonction réelle de variable réelle. Soit f une fonction bornée sur toute partie bornée de $\mathbb{R}$, c'est à dire

(2.1) $\quad \forall A > 0, \ \exists C_A > 0, \ \forall x \in [-A, A], \ |f(x)| \leq C_A$.

on écrit dans ce cas que $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$. Soit φ une "fonction test" qui est très régulière

(2.2) $\quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(j)}(x)$ existe, $\forall x \in \mathbb{R}$

et de plus à "support compact":

(2.3) $\quad \exists A > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ |x| \geq A \Longrightarrow \varphi(x) = 0$.

on écrit dans ce cas que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (voir la figure 1).

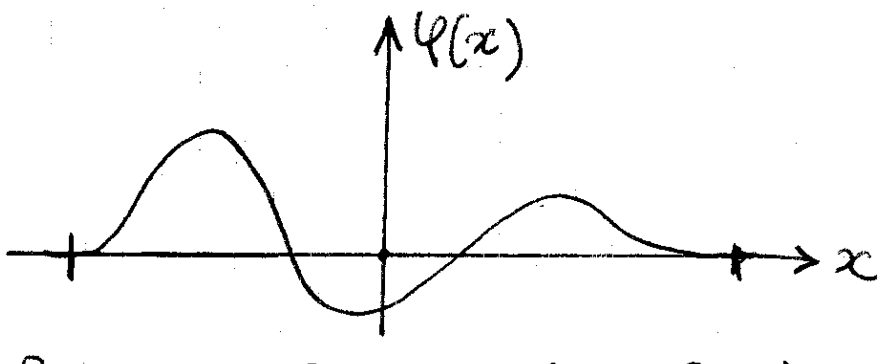


Figure 1. Fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- Pour $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le nombre $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ est toujours bien défini. D'une part puisque φ est à support compact, on a nécessairement $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-A}^{A} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ (avec A de la relation (2.3); il dépend de la fonction φ!!). D'autre part, la fonction $|f(x)\varphi(x)|$ est bornée sur $[-A, A]$ car f est bornée sur tout compact et φ est continue. Donc l'intégrale $\int_{-A}^{A} |f\varphi|$ existe, ce qui donne un sens à l'intégrale "absolument convergente" $\int_{-A}^{A} f(x)\varphi(x)\,dx$. Pour $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, le <u>nombre</u>

$$(2.4) \quad \langle T_f, \varphi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt, \quad f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

existe sans ambiguïté, dépend linéairement de φ :

$$(2.5) \quad \langle T_f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle T_f, \varphi \rangle + \mu \langle T_f, \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- De plus, on a aussi une propriété de continuité, que nous donnons de façon heuristique : si φ_k tend vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (notion délicate pour laquelle nous envoyons le lecteur "fana" à l'ouvrage original de Laurent Schwartz [Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1950]), alors $\langle T_f, \varphi_k \rangle$ tend vers $\langle T_f, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$:

$$(2.6) \quad \langle T_f, \varphi_k \rangle \to \langle T_f, \varphi \rangle \quad \text{si} \quad \varphi_k \to \varphi \ \text{dans} \ \mathcal{D}(\Omega).$$

- L'objet T_f est "analogue" à la fonction f, mais au lieu de considérer les "valeurs ponctuelles" $f(x)$, on regarde les "intégrales contre des fonctions tests φ" :

$$(2.7) \quad \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{R},$$

ce qui constitue le point de vue *moderne* sur la fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.

- De façon générale, nous appelons *distribution* T et nous notons $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ toute fonctionnelle qui à une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (très régulière et à support borné dans $\mathbb{R}$, cf (2.2) et (2.3)) associe un nombre, noté $\langle T, \varphi \rangle$ tel qu'on ait d'une part la *linéarité* :

$$(2.8) \quad \langle T, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle T, \psi \rangle, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \; \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et d'autre part la *continuité* par rapport à φ :

$$(2.9) \quad \big(\varphi_k \to \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)\big) \Rightarrow \big(\langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R}\big)$$

- Toute fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, comme nous avons vu plus haut dans ce paragraphe :

$$(2.10) \left\{ \begin{array}{l} L^\infty_{loc}(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ \qquad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi \, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \end{array} \right.$$

En particulier pour $f \equiv 1$, l'application $\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt$ est une distribution particulière.

- Nous aurons besoin dans la suite de la "fonction de Heaviside" H :

$$(2.11) \qquad H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

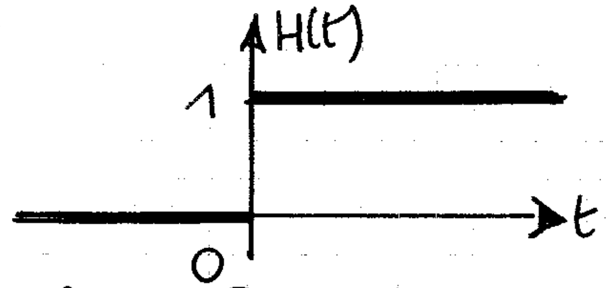


Figure 2. Fonction de Heaviside.

Alors la distribution T_H se définit clairement par la relation

(2.12) $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- Une autre distribution est associée au réel $a \in \mathbb{R}$ et consiste à considérer la valeur $\varphi(a)$ de la fonction $\varphi(\cdot)$ au point a. C'est la "masse de Dirac" δ_a :

(2.13) $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad a \in \mathbb{R}, \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Pour $a = 0$, on note simplement δ et on parle de la masse de Dirac (sans précision !) :

(2.14) $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

3) La masse de Dirac n'est pas une fonction

- Une question très naturelle à ce stade de la théorie est la suivante. Nous disposons d'une part des fonctions (localement) bornées qui donnent un sens à la distribution T_f. Par ailleurs, nous disposons de distributions δ_a ...
Mais ces distributions sont-elles de la forme T_f ?

En d'autres termes, la notion de distribution se réduit-elle à la notion de fonction ? Nous allons voir dans le paragraphe suivant que la notion de distribution est une vraie généralisation de la notion de fonction, en particulier, la masse de Dirac ne peut pas être représentée par une fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$:

$$(3.1) \quad \forall f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}), \exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \neq \varphi(0).$$

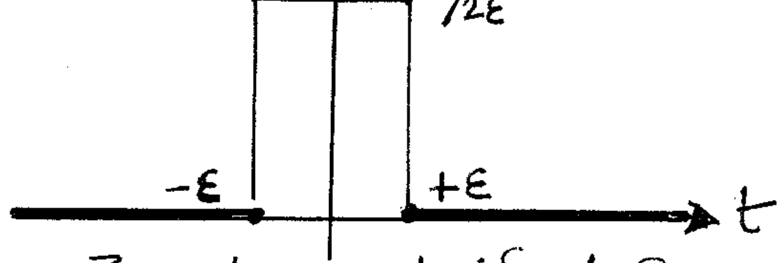
- Si la négation de (3.1) est vraie, $\exists f$ fonction localement bornée telle que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$, c'est à dire $T_f = \delta$ et la masse de Dirac est représentée par la fonction f. Nous n'allons pas démontrer la relation (3.1), mais l'<u>illustrer</u> à l'aide de l'exemple hyper-classique suivant.

- Nous <u>fixons</u> $\varepsilon > 0$ et approchons $\varphi(0)$ par sa moyenne $m_\varepsilon(\varphi)$ dans l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$:

$$(3.2) \quad m_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt, \ \varepsilon > 0, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Alors $m_\varepsilon(\varphi)$ peut s'écrire sous la forme $\langle \delta_\varepsilon, \varphi \rangle$ avec δ_ε illustré figure 3 :

$$(3.3) \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



<u>Figure 3.</u> Approximation δ_ε de δ

On a en effet

$$(3.4) \qquad m_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t)\varphi(t)\,dt \quad , \varepsilon > 0, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Quand $\varepsilon \to 0$, $m_\varepsilon(\varphi)$ tend vers $\varphi(0)$ dès que φ est continue. Une condition "naturelle" à demander si (3.1) est vraie est que δ_ε tende vers f si $\varepsilon \to 0$, ce qui permettra de trouver une éventuelle fonction f. Or si $\varepsilon \to 0$, $\delta_\varepsilon(y) = 0$ dès que $|y| > \varepsilon$, ce qui montre que la famille de fonctions δ_ε converge simplement vers la fonction "nulle", sans préciser la valeur en zéro de la fonction limite, qui vaut d'ailleurs $+\infty$:

$$(3.5) \qquad \delta_\varepsilon \xrightarrow[\text{simple}]{} f = \begin{cases} 0 & \text{si } |y| \neq 0 \\ +\infty & \text{si } y = 0 \end{cases} \quad , \varepsilon \to 0.$$

- La "fonction" delta de Dirac serait donc "nulle partout", sauf en zéro où elle est infinie. Le problème est que dans la théorie moderne de l'intégrale (Lebesgue), l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt$ est <u>parfaitement définie</u> pour f introduite à la relation (3.5) et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: cette intégrale est nulle !

$$(3.6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \ f \text{ définie en } (3.5)$$

On ne peut donc satisfaire à la relation (3.1) pour une telle fonction dès que $\varphi(0) \neq 0$.

4) Dérivation au sens des distributions

- Nous disposons maintenant des fonctions classiques, des fonctions tests très régulières et nulles à l'extérieur d'une partie bornée de $\mathbb{R}$, et de leurs duales, les distributions. Si on se donne f dérivable qui appartient de plus à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ ainsi que sa dérivée f' d'une part, une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'autre part, nous pouvons écrire la formule d'intégration par parties :

$$(4.1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ f \in L^\infty_{loc},\ f' \in L^\infty_{loc},$$

En effet, ces deux intégrales portent en fait sur un certain intervalle de type $[-A,+A]$ et $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$ implique que le terme tout intégré est nul.

- A l'aide de la définition générale (2.4), nous pouvons écrire cette relation (4.1) sous la forme :

$$(4.2) \qquad \langle T_{f'}, \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle,\ f \in L^\infty_{loc},\ f' \in L^\infty_{loc},\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

c'est l'intégration par parties, mais réécrite dans le langage des distributions. Or la construction-même de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ implique que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, elle est très régulière et à support compact, donc c'est également le cas de sa dérivée φ'. Nous avons

$$(4.3) \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \;;$$

on dit que l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est <u>stable par dérivation</u>.

- Nous relisons la propriété (4.2) en la généralisant, donc en la transformant en définition, laquelle sera cohérente avec le cas particulier déjà traité. Regardons le membre de gauche de la relation (4.2). C'est la dérivée de f, appliquée à φ. Nous avons envie de dire aussi que c'est la dérivée de la distribution T_f, appliquée à la fonction-test φ. Regardons maintenant le membre de droite. C'est l'opposé de la distribution T_f, appliquée à une <u>autre</u> fonction test de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, à savoir φ'. Nous remarquons que l'expression $-\langle T_f, \varphi' \rangle$ garde un sens si on remplace la "distribution fonction" T_f par une distribution <u>arbitraire</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Conclusion partielle : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la propriété (4.3) permet de donner un sens au membre de droite de la relation (4.2), ce quel que soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Mais alors le membre de gauche, qui n'a a priori pas de sens, "veut être" la dérivée T' de la distribution T, appliquée à la fonction test φ, puisque c'est le cas pour $T = T_f$!

• Nous posons donc la définition suivante pour la dérivée T' d'une distribution T :

(4.4) $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Si T représente la fonction f, ie si $T = T_f$, alors la relation (4.4) est <u>identique</u> à (4.3), avec pour définition de la dérivée $(T_f)'$ l'expression naturelle

(4.5) $(T_f)' = T_{f'}$, $f \in L^\infty_{loc}$, $f' \in L^\infty_{loc}$.

Mais la relation (4.4) définit $(T_f)'$ pour <u>toute</u> fonction $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, même si la dérivée f' n'existe pas ! Nous voyons que la relation (4.4) permet de définir la <u>dérivée de toute fonction</u> $f \in L^\infty_{loc}$, ce <u>au sens des distributions</u>. Bien entendu, les notions de dérivée classique et de dérivée au sens des distributions coïncident pour une fonction dérivable, ainsi que le montre la relation (4.5).

• Si la dérivée au sens des distributions d'une fonction dérivable ne nous apportera aucune surprise, nous pouvons trouver piquant pour notre curiosité de savoir donner un sens (distribution !) à la dérivée de toute fonction f ! Et même de savoir dériver une fonction non continue ! Calculons par exemple la dérivée $(T_H)'$ de la fonction de

Heaviside introduite à la relation (2.11), sans oublier l'expression $\langle T_H, \varphi \rangle$ de (2.12). Il suffit de partir de la définition (4.4):

$$\begin{aligned}
\langle (T_H)', \varphi \rangle &= - \langle T_H, \varphi' \rangle \\
&= - \int_0^\infty \varphi'(t)\, dt && \text{(relation (2.12))} \\
&= - [\varphi]_0^\infty && \text{(calcul intégral classique)} \\
&= \varphi(0) && (\text{car } \varphi(t) \equiv 0 \text{ si } t \geq A) \\
&= \langle \delta, \varphi \rangle && \text{(définition (2.14) de } \delta)
\end{aligned}$$

Cette relation est vraie pour toute fonction test φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Nous avons donc l'égalité suivante

(4.6) $\quad (T_H)' = \delta$

qu'on peut écrire avec moins de formalisme $H' = \delta$. La dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside n'est pas une fonction, c'est une distribution : la masse de Dirac en zéro.

- Nous pouvons affiner notre étude et tenter de dériver la fonction "valeur absolue" $\alpha(t)$ définie par

(4.7) $\quad \alpha(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ -t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

et illustrée à la figure 4. On sait que la

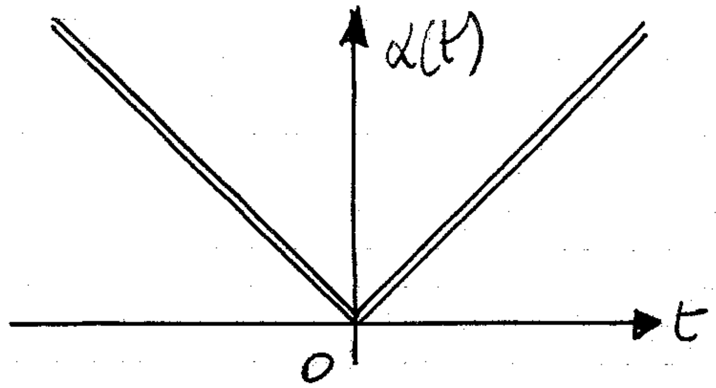


Figure 4. Fonction "valeur absolue" $\alpha(t)$.

fonction $\alpha(t)$ est dérivable au sens classique pour tout $t \neq 0$, et le nombre dérivé $\alpha'(t)$ correspondant est donné par

$$(4.8) \qquad \alpha'(t) = \begin{cases} +1 \,, & t > 0 \\ -1 \,, & t < 0 \end{cases} .$$

On remarque que $t \mapsto \alpha'(t)$ est une fonction qui, bien que non définie en 0, est bornée. On voit d'ailleurs facilement (exercice!) que

$$(4.9) \qquad \alpha' = -1 + 2H \,, \quad H \text{ fonction de Heaviside}$$

• Calculons la dérivée de la distribution T_α. On a:

$$\begin{aligned}
\langle (T_\alpha)', \varphi \rangle &= -\langle T_\alpha, \varphi' \rangle \qquad \text{(définition (4.4))} \\
&= -\int_{-\infty}^{0} (-t)\varphi'(t)\,dt - \int_0^\infty t\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{(def de } \alpha\text{)} \\
&= \Big[t\varphi(t)\Big]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt - \Big[t\varphi(t)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(t)\,dt \\
&\qquad \text{(intégration par parties)} \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + \int_0^\infty \varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

car $t\varphi(t)$ est nulle hors d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Nous remarquons enfin que la dernière expression est égale à $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha'(t)\, \varphi(t)\, dt$. D'où

$$(4.10) \quad \langle (T_\alpha)', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha'(t) \varphi(t) dt = \langle T_{\alpha'}, \varphi \rangle$$

ce qui montre que $(T_\alpha)' = T_{\alpha'}$, et généralise la relation (4.5) à la fonction continue α, qui n'est pas dérivable en zéro! Nous retenons que même si elle n'est pas dérivable en zéro, la dérivée au sens des distribution de α est représentée (est égale!) par la fonction $\alpha'(t)$ calculée classiquement via la relation (4.8).

- Il nous reste pour terminer ce chapitre à traiter le cas "général" d'une fonction f régulière sauf en un nombre fini (pour fixer les idées!) de points $x_1 < x_2 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_n$ où elle est discontinue

$$(4.11) \qquad [f]_j = \left(\lim_{\varepsilon \gtrsim 0} f(x_j + \varepsilon) \right) - \left(\lim_{\varepsilon \gtrsim 0} f(x_j - \varepsilon) \right).$$

on pose par commodité $f(x_j^+) = \lim(f(x_j+\varepsilon), \varepsilon \gtrsim 0)$ et $f(x_j^-) = \lim(f(x_j - \varepsilon), \varepsilon \gtrsim 0)$, ainsi qu'illustré à la figure 5. Par ailleurs, on suppose la fonction f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, dérivable à gauche des x_j et dérivable à droite de x_j :

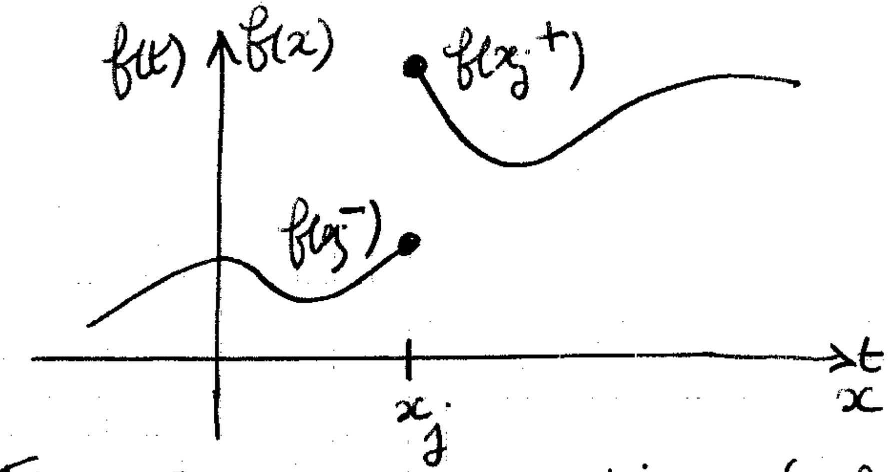


Figure 5. Fonction discontinue régulière par morceaux.

$f'_j(x_j^-) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x_j^-) - f(x_j - \varepsilon)\right)$ et $f'_j(x_j^+) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x_j+\varepsilon) - f(x_j^+)\right)$. Nous calculons la dérivée au sens des distributions de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la distribution T_f à l'aide de la relation (4.4). Il vient pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle (T_f)', \varphi \rangle &= - \langle T_f, \varphi' \rangle \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt \\
&= - \int_{-\infty}^{x_1} f\varphi' - \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f\varphi'\,dt - \int_{x_n}^{+\infty} f\varphi'\,dt
\end{aligned}$$

$$= - \left[f\varphi\right]_{-\infty}^{x_1} - \sum_{j=1}^{n-1} \left[f\varphi\right]_{x_j}^{x_{j+1}} - \left[f\varphi\right]_{x_n}^{+\infty}$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_1} f'(t)\varphi(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\varphi(t)\,dt + \int_{x_n}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= - f(x_1^-)\varphi(x_1) - \sum_{j=1}^{n-1} \left[f(x_{j+1}^-)\varphi(x_{j+1}) - f(x_j^+)\varphi(x_j)\right] + f(x_n^+)\varphi(x_n)$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt$$

$$= -f(x_1^-)\varphi(x_1) - \sum_{j=2}^{n} f(x_j^-)\varphi(x_j) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j^+)\varphi(x_j)$$
$$+ f(x_n^+)\varphi(x_n) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$
$$= -\sum_{j=1}^{n} f(x_j^-)\varphi(x_j) + \sum_{j=1}^{n} f(x_j^+)\varphi(x_j) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j^+) - f(x_j^-)\right)\varphi(x_j) + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} [f]_j \langle \delta_{x_j}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle. \quad \text{Donc}$$

$$(4.12) \qquad (T_f)' = \sum_{j=1}^{n} [f]_j \, \delta_{x_j} + T_{f'} .$$

La dérivée au sens des distributions de la fonction f est la somme de la dérivée classique quand elle est définie, <u>plus</u> la somme des <u>sauts</u> $[f]_j$ multipliés par la masse de Dirac au point x_j de <u>discontinuité</u> de la fonction f. On peut se rendre compte facilement (exercice !) que les relations (4.6) et (4.10) sont deux cas particuliers de la relation (4.12).

Dubois, 25 oct 05.