le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

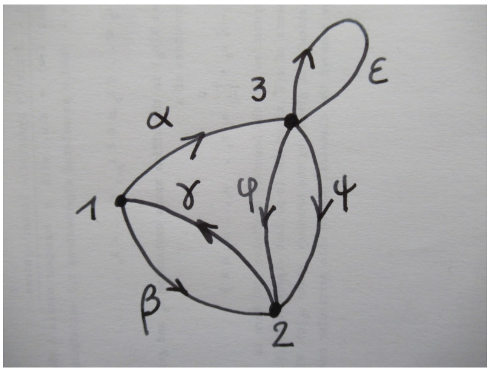
Codes, matrices, graphes et automates **(MVA004)**

Devoir 3
à rendre pour la séance numéro 10, le 22 avril 2020

Graphe dual [d'après J. Vélu]

On se donne un graphe orienté $G = (X,\, E,\, \delta)$. L'ensemble X est l'ensemble des sommets, l'ensemble E l'ensemble des arêtes et δ est une application de E dans le produit $X \times X$ qui à toute arête $a \in E$, associe son sommet initial s et son sommet final s' : $\delta(a) = (s,\, s')$.
On construit un nouveau graphe G appelé “graphe dual” de la façon suivante. L'ensemble des sommets de G^* est égal à l'ensemble E des arêtes de G. Deux arêtes $a \in E$ et $b \in E$ sont reliées par le graphe G^* si et seulement si le sommet final de l'arête a est égal au sommet initial de l'arête b. On pose $G^* \equiv (E,\, E^*,\, \delta^*)$. Il s'agit maintenant de déterminer l'ensemble E^* des arêtes duales et l'application δ^* de E^* dans $E \times E$.

a) Tenter de construire le graphe dual du graphe décrit à la figure ci-dessous.



b) On revient au cas général. Montrer que les arêtes duales $\alpha \in E^*$ du graphe dual G^* sont définies par la relation : $\alpha \in E^*$ si et seulement si
$\exists\ a \in E,\ \exists\ b \in E,\ \exists\ s,\, \sigma,\, s' \in X$ tels que $\delta(a) = (\sigma,\, s)$ et $\delta(b) = (s,\, s')$.

c) Montrer qu'on a alors $\delta^*(\alpha) = (a,\, b)$.

On note J^+ et J^- les matrices d'incidence du graphe initial G et M^* la matrice d'adjacence du graphe dual G^*.

d) Montrer qu'on a la relation $M^* = (J^-)^{\rm t}\ J^+$.

e) Calculer la matrice d'adjacence M^* du graphe dual G^* pour le graphe G proposé à la figure ci-dessus.

f) Reprendre la question a) et proposer une représentation graphique du graphe dual G^* pour le graphe G décrit à la figure ci-dessus.

François Dubois, 01 avril 2020.