le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Codes, matrices, graphes et automates **(MVA004)**

Devoir 2
à rendre pour la séance numéro 7, le 12 mars 2024

Exercice 1 - Un code linéaire

On code une suite de bits en la divisant en blocs de deux bits auxquels on adjoint trois bits de contrôle de la manière suivante : si le bloc est ab, le mot de code sera $abcab$ avec $c = a + b$.

a) Vérifier que ce code est linéaire et écrire sa matrice génératrice.

b) Etablir la liste des mots de code.

c) Déterminer la distance minimale du code.

d) Ce code est-il parfait?

e) On reçoit les messages $m = 11010$ et $m' = 01110$. A-t-on à faire à des mots de code?

f) Pour chacun des mots de code, noté c, déterminer $m + c$ et en déduire le mot de code c_1 tel que le poids de $m + c$ soit le plus faible possible.

g) De même, pour chacun des mots de code c, déterminer $m' + c$. Est-il possible d'en déduire un mot de code c_2 tel que le poids de $m' + c$ soit minimal ?

h) Le mot de code transmis est c_0 ; or on reçoit m. Sachant que la probabilité pour qu'un bit donné ait été mal transmis est $p = \frac{1}{10}$, quelle est la probabilité pour que $c_0 \neq c_1$?

Exercice 2 - Un code de longueur 9 [d'après Jacques Vélu]

Pour coder un mot de quatre bits $a = b_1\, b_2\, b_3\, b_4$, on construit cinq bits de contrôle c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 de sorte que $b_1 + b_2 + c_1 = 0$, $b_3 + b_4 + c_2 = 0$, $b_1 + b_3 + c_5 = 0$, $b_2 + b_4 + c_4 = 0$, $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ et $c_3 + c_4 + c_5 = 0$.

a) Montrer que le bit c_3 est bien défini par les relations précédentes.

b) Montrer que ce code défini par $\varphi(b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = (b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5)$ est linéaire.

c) Quelle est sa matrice génératrice G ?

d) Quelle est sa matrice de contrôle H ?

e) Combien ce code peut-il corriger d'erreur(s) sans ambiguité ?

f) Expliciter la liste des mots du code.

g) Quelle est la distance minimale de ce code ?

h) Combien ce code peut-il détecter d'erreurs ?

François Dubois, 27 février 2024.