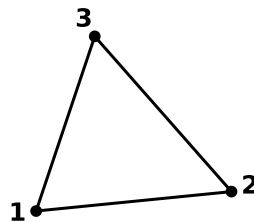


Cours 7 Graphes

- Introduction

Un graphe est composé d'un ensemble de points ou de sommets et d'un ensemble d'arêtes, de liens entre ces points. Un premier modèle mathématique de graphe consiste à se donner un couple $G = (X, E)$ où X est un ensemble fini de sommets [vertex en anglais] et E un ensemble fini d'arêtes [edges en anglais].

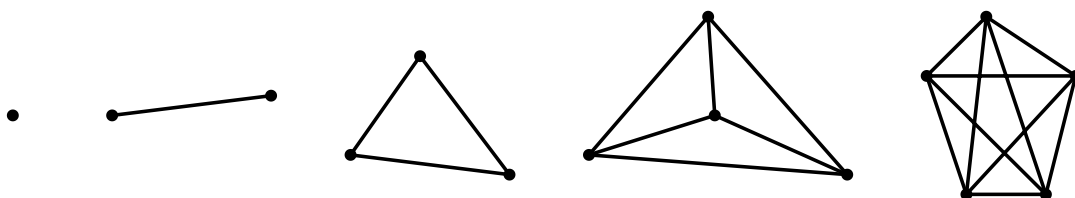


Ainsi, sur la figure ci-dessus, on a $X = \{1, 2, 3\}$ et les arêtes relient les sommets 1 et 2, 2 et 3, 3 et 1.

Afin de définir l'ensemble E des arêtes, on introduit l'ensemble X_2 des sous-ensembles de X à deux éléments, l'ensemble des paires d'éléments de X : $X_2 = \{\{s, s'\}, s \in X, s' \in X, s \neq s'\}$. On a alors $E \subset X_2$: les arêtes sont des paires d'éléments de l'ensemble des sommets. Une arête $a = \{s, s'\}$ est composée des deux sommets distincts s et s' . On dit que les sommets s et s' sont voisins ou adjacents ; les sommets s et s' sont les deux extrémités de l'arête a .

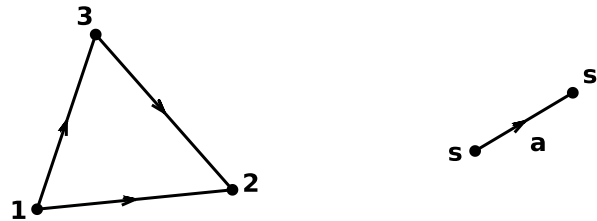
L'ordre du graphe n est par définition le nombre $|X|$ de sommets, nombre d'éléments de l'ensemble X .

On dit qu'un graphe est complet quand tous les sommets sont reliés à tous les autres, lorsque tous les sommets sont adjacents. C'est le cas des graphes K_n illustrés à la figure ci-dessous pour l'entier n allant de 1 à 5. On observe qu'un graphe K_n possède $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

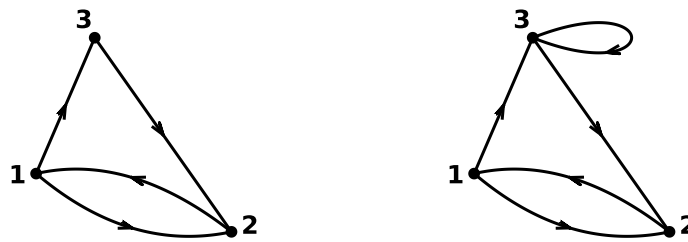


- Donner un sens de parcours le long des arêtes

On se propose d'orienter les arêtes, de leur ajouter un sens de parcours, comme pour la figure de gauche ci-dessous. On a dans ce cas toujours $X = \{1, 2, 3\}$ mais l'ensemble des arêtes est inclus dans l'ensemble des couples (s, s') de sommets $E \subset X \times X$. Pour l'exemple de la figure, $E = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2)\}$.



Avec l'orientation des arêtes, on peut rajouter au graphe défini juste au-dessus une nouvelle arête qui va du sommet 2 au sommet 1.

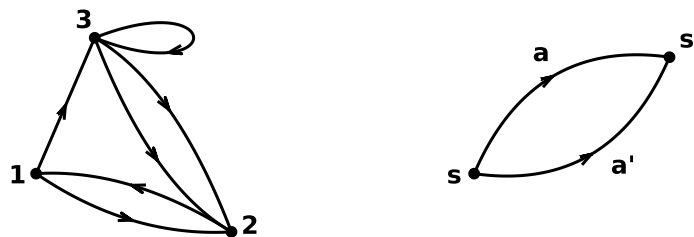


On a maintenant pour le graphe représenté ci-dessus à gauche : $(1, 2) \in E$, $(2, 1) \in E$, $(1, 3) \in E$ mais $(3, 1) \notin E$.

On peut également supposer que le sommet initial est identique au sommet final, ce qui permet d'introduire des boucles dans le graphe, comme à la figure ci-dessus à droite, où le sommet de départ "3" est identique au sommet d'arrivée.

- Arêtes parallèles

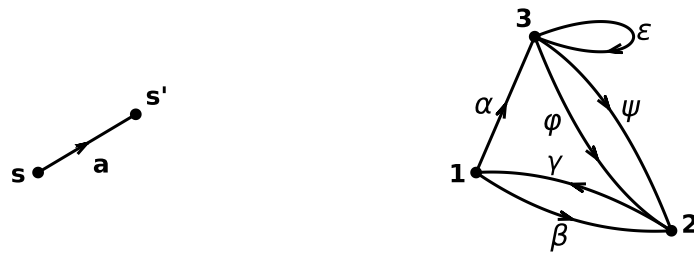
Dans certaines applications, deux arêtes différentes partent d'un sommet donné s et aboutissent à une unique sommet s' , comme sur les figures ci-dessous.



qui vont du sommet “3” au sommet “2” dans l’exemple précédent. Il faut donc changer de modèle mathématique pour décrire la situation de deux arêtes parallèles.

- Graphe orienté, ou “directed graph” en anglais

Un graphe orienté est un triplet $G = (X, E, \delta)$ où X est l’ensemble fini des sommets, E l’ensemble fini des arêtes et δ une application de l’ensemble E des arêtes dans le produit cartésien $X \times X$ qui fait le lien entre les arêtes et les sommets. Pour une arête $a \in E$, $\delta(a) = (s, s')$ est composé d’un couple de sommets. On peut expliciter l’application δ pour l’exemple construit aux pages précédentes. On a toujours $X = \{1, 2, 3\}$ et on donne un nom aux arêtes, par exemple $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \varphi, \psi\}$.

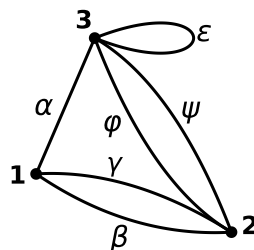


E	a	α	β	γ	ε	φ	ψ
$X \times X$	$\delta(a) = (s, s')$	(1, 3)	(1, 2)	(2, 1)	(3, 3)	(3, 2)	(3, 2)

- Graphe non orienté

Avec un graphe non orienté, on souhaite enlever les flèches d’un graphe orienté, tout en se permettant la présence de boucles et d’arêtes parallèles. Un tel graphe G est toujours donné par un triplet $G = (X, E, \delta)$. L’ensemble X est toujours l’ensemble (fini) des sommets et l’ensemble E l’ensemble fini des arêtes.

Pour construire le lien δ entre les arêtes et les sommets, nous devons d’abord introduire l’ensemble X_1 des singletons de l’ensemble X et l’ensemble X_2 des paires d’éléments de X . L’ensemble X_1 est défini par $X_1 = \{\{s\}, s \in X\}$: c’est essentiellement une copie de l’ensemble des sommets X . L’ensemble des paires $X_2 = \{\{s, s'\}, s \in X, s' \in X, s \neq s'\}$ a été rencontré plus haut dans cette leçon. L’application δ associe à chaque arête $a \in E$ un élément de $X_1 \cup X_2$. Si $\delta(a) = \{s\}$, l’arête a est une boucle qui part et aboutit au même sommet s . Si $\delta(a) = \{s, s'\}$, les deux sommets s et s' sont différents et l’arête a décrit le lien entre ces deux sommets adjacents.



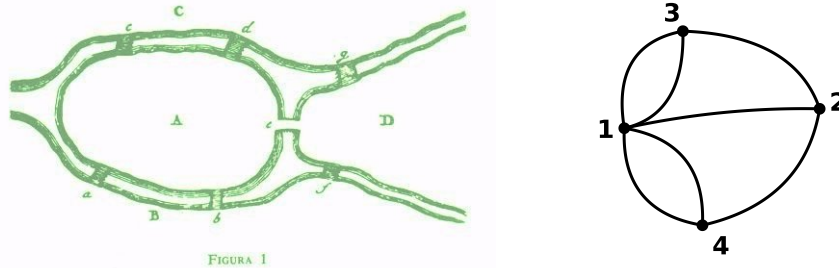
Pour l'exemple de la figure ci-dessus, on a les mêmes ensembles X et E que pour le graphe orienté, avec une application δ décrite par le tableau ci-dessous.

E	a	α	β	γ	ε	φ	ψ
$X_1 \cup X_2$	$\delta(a) = \{s, s'\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{2, 1\}$	$\{3\}$	$\{3, 2\}$	$\{3, 2\}$

Un graphe simple, orienté ou pas, est un graphe sans boucle ni arêtes parallèles. Dans ce cas, les définitions d'un graphe proposées au début de ce chapitre peuvent être utilisées.

- Les ponts de Königsberg

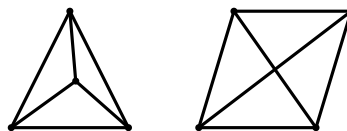
La ville de Königsberg (Kaliningrad aujourd'hui, exclave russe au bord de la mer Baltique avec la Lituanie au nord et la Pologne au sud) était au 18e siècle une ville royale de Prusse. En 1735, Leonhard Euler [1707–1783, mathématicien suisse] publie un article en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* où il pose et résout un problème qui fonde la théorie des graphes.



La ville de Königsberg était divisée en quatre quartiers (île, est, nord, sud). Ces quartiers étaient reliés entre eux par sept ponts au total, figurés sur le croquis ci-dessus. La question posée par Euler est de trouver une promenade qui permet de revenir à son point de départ en passant par tous les ponts une fois et une seule.

En langage moderne, on peut modéliser ce problème à l'aide d'un graphe non orienté. Chacun des quartiers (numérotés de 1 à 4) est un sommet du graphe et les sept ponts sont les arêtes du graphes. On se reportera à la figure ci-dessus, à droite. On observe que ce graphe n'est pas un graphe simple puisqu'il possède deux paires d'arêtes parallèles. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.

- Graphes isomorphes



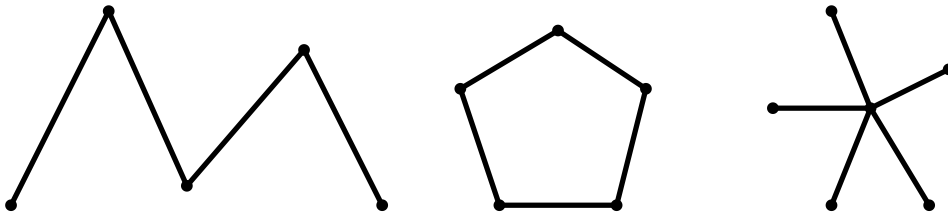
À la figure ci-dessus, on “sent” bien que si on déplace le sommet central et qu'on le tire à l'extérieur du triangle, comme si les arêtes étaient des élastiques, on obtient deux figures qui représentent en fait le “même” graphe. On dit que ces deux graphes sont isomorphes et on formalise cette notion avec la définition qui suit.

Les graphes orientés $G = (X, E, \delta)$ et $\tilde{G} = (\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\delta})$ sont isomorphes (on note $G \sim \tilde{G}$) si et seulement si il existe d'une part une bijection φ de X dans \tilde{X} et d'autre part une bijection ψ

de E dans \tilde{E} de sorte que pour toute arête $a \in E$ telle que $\delta(a) = (s, s')$, on ait $\tilde{\delta}(\psi(a)) = (\varphi(s), \varphi(s'))$.

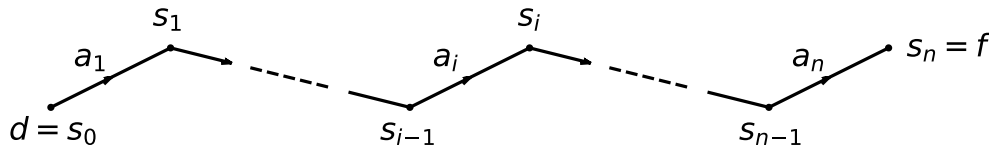
La définition de deux graphes non orientés isomorphes est très voisine. Les graphes non orientés $G = (X, E, \delta)$ et $\tilde{G} = (\tilde{X}, \tilde{E}, \tilde{\delta})$ sont isomorphes si et seulement si il existe d'une part une bijection φ de X dans \tilde{X} et d'autre part une bijection ψ de E dans \tilde{E} de sorte que pour toute arête $a \in E$ on a l'une des deux éventualités suivantes : si $\delta(a) = \{s\}$, alors $\tilde{\delta}(\psi(a)) = \{\varphi(s)\}$ et si $\delta(a) = \{s, s'\}$, alors $\tilde{\delta}(\psi(a)) = \{\varphi(s), \varphi(s')\}$.

Cette notion d'isomorphisme permet de mettre en évidence des familles de graphes non isomorphes, c'est à dire vraiment différents. Outre la famille K_n présentée plus haut, on dispose également des familles P_n , C_n et S_n présentées ci-dessous de gauche à droite pour la valeur particulière $n = 5$.



- Chemin dans un graphe

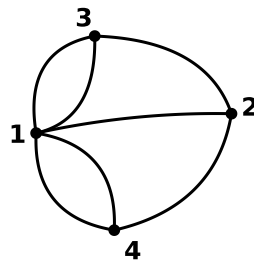
On se donne un graphe orienté $G = (X, E, \delta)$ et deux sommets d et f de ce graphe. Un chemin allant du sommet de départ $d \in X$ au sommet final $f \in X$ est la donnée de $(n + 1)$ sommets $d = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = f$ ($s_j \in X$) et de n arêtes a_1, a_2, \dots, a_n ($a_j \in E$) tels que $\delta(a_i) = (s_{i-1}, s_i)$ si $1 \leq i \leq n$.



La définition est analogue dans un graphe non orienté. On remplace simplement la condition sur l'application δ par : $\delta(a_i) = \{s_{i-1}, s_i\}$ pour $1 \leq i \leq n$.

Un circuit est un chemin tel que le sommet initial d est identique au sommet final f : $d = f$.

Le problème posé par Euler revient à chercher un circuit dans le graphe non orienté ci-dessous qui contienne toutes les arêtes une fois et une seule. On parle alors de circuit eulérien.



- Degré d'un sommet

On se donne un graphe non orienté et un sommet $s \in X$ de ce graphe. Le degré du sommet s , noté $d(s)$ est le nombre d'arêtes dont le sommet s est une extrémité. Avec l'exemple de K_4 (voir la figure ci-dessous), le degré de tous les sommets est toujours égal à 3. Si le graphe comporte une boucle, on doit attribuer deux points de degré au sommet correspondant puisqu'il est à la fois sommet initial et sommet final de l'arête.

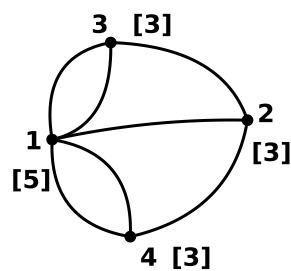


Pour un graphe orienté, on distingue les arêtes entrantes dans le sommet s et les arêtes sortantes du sommet (voir la figure ci-dessus). On définit donc à la fois le degré entrant $d^-(s)$ et le degré sortant $d^+(s)$ pour un sommet donné s . Le degré entrant $d^-(s)$ est égal au nombre d'arêtes entrantes dans le sommet s , $d^-(s) = |\{a \in E, \exists \sigma \in X, \delta(a) = (\sigma, s)\}|$ et le degré sortant $d^+(s)$ au nombre d'arêtes sortantes de s : $d^+(s) = |\{a \in E, \exists s' \in X, \delta(a) = (s, s')\}|$. Dans le cas de la figure ci-dessus, on a $d^-(s) = 2$ et $d^+(s) = 3$.

Le lien entre les degrés $d^-(s)$ et $d^+(s)$ d'un sommet d'un graphe orienté et le degré $d(s)$ associé au graphe non orienté est simple. On a $d^-(s) + d^+(s) = d(s)$.

- Circuit eulérien

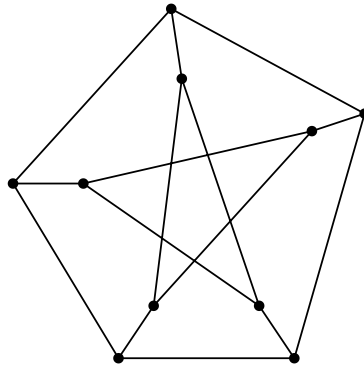
Si un graphe (non orienté) possède un circuit eulérien, alors pour tout sommet $s \in X$, son degré $d(s)$ est un nombre pair. Noter qu'il faut simplement revenir du sommet que l'on vient de visiter, ce pour tous les sommets du graphe !



Une conséquence de ce résultat est que le problème des ponts de Königsberg n'a pas de solution. En effet, on a noté sur la figure ci-dessus le degré de chaque sommet pour le graphe associé à ce problème. Ils sont tous impairs, alors qu'il faudrait qu'ils soient tous pairs pour que ce problème ait une solution !

- Graphe régulier

Un graphe est régulier si tous ses sommets ont même degré. C'est le cas en particulier de K_n et de C_n mais cette propriété est en défaut pour les graphes P_n et S_n introduits plus haut.



Le graphe de Petersen [Julius Petersen, 1839–1910, mathématicien danois] représenté ci-dessus est d'ordre 10 et contient 15 arêtes. Il est régulier et tous ses sommets sont de degré trois.

- Somme des degrés

Nous avons le résultat général suivant : la somme des degrés pour tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes. On a $\sum_{s \in X} d(s) = 2|E|$.

L'idée de la preuve est de remarquer que chaque arête contribue pour +1 à son extrémité de début et pour la valeur +1 également pour son extrémité finale. Une boucle contribue également pour deux unités puisque par convention, elle est comptée avec un degré 2 pour le sommet d'extrémités.

- Matrices d'incidence d'un graphe orienté

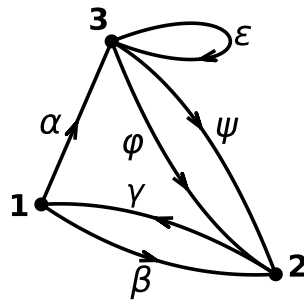
Ces deux matrices sont notées J^+ et J^- . Elles ont un nombre de lignes égal à l'ordre $n = |X|$ du graphe et un nombre de colonnes égal au nombre $|E|$ d'arêtes. L'élément de matrice est noté $J_{s,a}^\pm$ ou $J^\pm(s, a)$ pour bien rappeler que le premier indice (les lignes) court sur les sommets ($s \in X$) et le second indice (les colonnes) est associé aux arêtes, avec $a \in E$.



On a $J^+(s, a) = 1$ si s est le sommet initial de l'arête a (voir ci-dessus la figure de gauche) et $J^+(s, a) = 0$ sinon. De façon analogue, $J^-(s', a) = 1$ si s' est le sommet final de l'arête a (voir ci-dessus la figure de droite) et $J^-(s', a) = 0$ sinon. Si on écrit $J^+ \xi = \theta$, alors ξ est un vecteur colonne ayant $|E|$ lignes et θ un vecteur colonne qui comporte $|X|$ lignes.

Pour le graphe déjà traité plus haut dans ce chapitre et représenté à la figure ci-dessous, l'explicitation des matrices J^+ et J^- ne demande que du soin. On a

$$J^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



- Produits de matrices d'incidence

On a la propriété générale suivante. La matrice produit $J^+(J^+)^t$ est égale à la matrice diagonale des degrés sortants $d^+(s)$ pour les différents sommets $s \in X$. De façon analogue, le produit des matrices $J^-(J^-)^t$ est égal à la matrice diagonale des degrés entrants $d^-(s)$.

Nous vérifions cette propriété pour l'exemple de graphe traité dans ce chapitre et illustré ci-dessus. On a

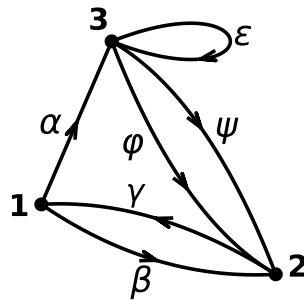
$$J^+(J^+)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J^-(J^-)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Matrice d'incidence d'un graphe non orienté

Pour un graphe non orienté, on ne sait pas si une arête entre ou sort d'un sommet donné. La matrice d'incidence J a un nombre de lignes égal au nombre $|X|$ de sommets du graphe et un nombre de colonnes égal au nombre $|E|$ d'arêtes. Pour $s \in X$ et $a \in E$, on pose $J(s, a) = 1$ si le sommet s est une extrémité d'une arête a qui joint deux sommets différents du graphe, $J(s, a) = 2$ si l'arête a fait une boucle du sommet s vers lui-même et enfin $J(s, a) = 0$ dans tous les autres cas.

Si on supprime l'orientation d'un graphe orienté, on constate que l'on a $J^+ + J^- = J$.



- Matrice d'adjacence d'un graphe orienté

La matrice d'adjacence M est une matrice carrée d'ordre $n = |X|$. L'élément de matrice $M(s, s')$ entre la ligne qui correspond au sommet s et la colonne qui correspond au sommet s' est égal au nombre d'arêtes allant de s à s' . Pour le graphe de la figure ci-dessus, on constate

visuellement que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Une proposition importante exprime que deux graphes orientés sont isomorphes si et seulement si après renumérotation éventuelle des sommets, ils ont même matrice d'adjacence.

On a la relation générale $J^+(J^-)^t = M$.

En effet, on a $(J^+(J^-)^t)_{ss'} = \sum_{a \in E} J^+(s, a) J^-(s', a)$.



Le nombre $J^+(s, a)$ est différent de 0 seulement dans le cas où l'arête a est sortante du sommet s (figure de gauche ci-dessus) et le nombre $J^-(s', a)$ est différent de 0 seulement si l'arête a est entrante dans le sommet s' (figure de droite ci-dessus). Donc le produit $J^+(s, a) J^-(s', a)$ est non nul si et seulement si $\delta(a) = (s, s')$, c'est à dire si l'arête a va du sommet s au sommet s' . La somme $\sum_{a \in E} J^+(s, a) J^-(s', a)$ compte donc le nombre d'arêtes allant de s à s' ; elle est égale à $M(s, s')$. □

Nous illustrons cette propriété pour le graphe longuement traité dans ce chapitre. On a

$$J^+(J^-)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Matrice d'adjacence d'un graphe non orienté

La matrice correspondante \tilde{M} est toujours carrée et d'ordre égal à l'ordre du graphe. L'élément de matrice $\tilde{M}(s, s')$ compte le nombre d'arêtes qui relient les sommets s et s' , sachant qu'une boucle compte pour 2. La matrice \tilde{M} est symétrique et on a $\tilde{M} = M + M^t$ si on "désoriente" un graphe orienté.

On a une proposition analogue à celle vue pour les graphes orientés. Deux graphes non orientés sont isomorphes si et seulement si après renumérotation des sommets, ils ont même matrice d'adjacence.

- Graphe étiqueté

En vue de l'étude des automates finis, nous donnons une définition d'un graphe étiqueté. C'est un quadruplet $G = (X, E, A, \delta)$ avec X ensemble des sommets du graphe, E ensemble des arêtes, A un ensemble fini, ensemble des étiquettes (ou des labels) et δ l'application de E dans $X \times X \times A$ qui fait le lien entre ces trois ensembles ; $\delta : E \rightarrow X \times X \times A$. À toute arête $a \in E$, on associe le triplet $\delta(a) = (s, s', \ell)$ composé du sommet de départ $s \in X$, du sommet final $s' \in X$ et du label $\ell \in A$ qui permet de ranger les arêtes avec les différentes étiquettes.

Exercices

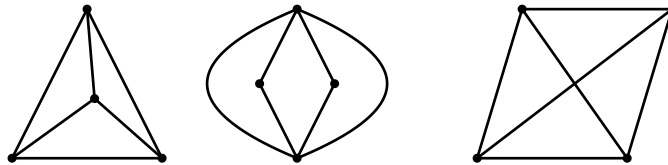
- Tournoi d'échecs [d'après O. Cogis et C. Schwartz]

On se propose d'organiser une rencontre entre cinq joueurs d'échecs où chaque joueur joue trois parties.

- Proposer un modèle mathématique de ce problème à l'aide d'un graphe simple non orienté.
- Faire une analyse détaillée de la recherche d'un graphe qui satisfait aux propriétés demandées par l'énoncé.
- En conclure que le problème posé n'a pas de solution.
- Rappeler pourquoi dans un graphe, la somme des degrés de tous les sommets est égale au double du nombre d'arêtes.
- En déduire que dans un graphe simple quelconque le nombre de sommets ayant un degré impair est un nombre pair.
- Reprendre le problème du tournoi d'échecs et le résoudre en une demi-ligne.

- Graphes isomorphes ? [d'après J. Vélou]

On considère les trois graphes de la figure ci-dessous.



- Calculer leurs matrices d'adjacence et en déduire quels sont les graphes isomorphes.
- Montrer à l'aide du degré que l'un des trois graphes est clairement non isomorphe aux deux autres.

- Qui connaît qui ? [d'après O. Cogis et C. Schwartz]

On se donne un entier n supérieur ou égal à deux. La question est de montrer que dans une assemblée de n personnes, il existe au moins deux personnes qui ont le même nombre de connaissances au sein de cette assemblée. On suppose que si une personne A connaît une

personne B, alors la personne B connaît la personne A. On suppose aussi que l'on ne se connaît pas soi-même.

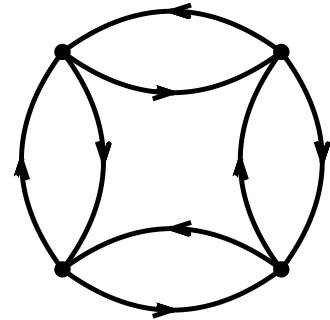
- Proposer un modèle mathématique de ce problème à l'aide de la théorie des graphes.
- Raisonnement par l'absurde. Si l'hypothèse contraire est vraie, montrer que les degrés de tous les sommets du graphe sont tous différents.

[on pourra écrire la négation de $(\exists s \neq s', d(s) = d(s'))$.]

- En déduire une contradiction et conclure que dans une assemblée de n personnes, il existe au moins deux personnes qui ont le même nombre de connaissances.

- Matrices d'incidence et d'adjacence [d'après J. Vélú]

On considère le graphe orienté de la figure ci-contre.



- Numéroter les sommets et les arêtes, puis expliciter les matrices d'incidence J^+ et J^- .
- Calculer la matrice d'adjacence M de ce graphe.
- Vérifier que le produit $J^+ (J^+)^t$ est bien égal à la matrice diagonale des degrés sortants de chaque sommet.
- Vérifier que le produit $J^- (J^-)^t$ est égal à la matrice diagonale des degrés entrants dans chaque sommet.
- Vérifier que le produit $J^+ (J^-)^t$ est égal à la matrice d'incidence M .

- Puissances de la matrice d'adjacence [d'après J. Vélú]

On se donne un graphe orienté G et on note M sa matrice d'adjacence. On se donne un entier k supérieur ou égal à un.

- On note M^k la puissance k^o de la matrice d'adjacence. Combien a-t-elle de lignes et de colonnes ?
- Montrer par récurrence sur k que pour deux sommets s et t du graphe, l'élément de matrice $M^k(s, t)$ est égal au nombre de chemins de longueur k permettant d'aller de s à t .
- Vérifier de façon graphique que cette propriété est satisfaite pour le graphe ci-dessous avec les valeurs $k = 1, 2, 3$.

