le cnam

Algèbre de Boole et Probabilités

Cours 5 Dénombrements

- Réunion d'ensembles disjoints

On se donne un entier $n \geq 1$ et n ensembles finis X_1, $X_2, \ldots, X_n$ non vides disjoints deux à deux : $X_i \cap X_j = \varnothing$ dès que $i \neq j$. Alors le nombre d'éléments de la réunion $\bigcup_{j=1}^{n} X_j = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ des ensembles X_j est égale à la somme des cardinaux $|X_j|$ de ces ensembles : $|\bigcup_{j=1}^{n} X_j| = \sum_{j=1}^{n} |X_j| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n|$.
L'addition est l'opération fondamentale pour dénombrer des cas de figure qui s'excluent mutuellement.

- Produit cartésien de deux ensembles

On se donne deux ensembles finis non vides X et Y. Le produit cartésien $P = X \times Y$ est composé de tous les couples de la forme (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$. Le nombre d'éléments de ce produit cartésien est égal au produit du nombre $|X|$ des éléments de l'ensemble X par le nombre $|Y|$ des éléments de l'ensemble Y. On a $|X \times Y| = |X|\,|Y|$.
Il y a $|X|$ possibilités de choisir la première composante x du couple (x, y). À chacun de ces choix, nous avons $|Y|$ choix possibles pour la seconde composante y. Le résultat s'en déduit alors avec une simple multiplication.

- Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles

On dispose toujours d'un nombre fini n d'ensembles X_j finis et non vides : $X_j \neq \varnothing$ pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$. Alors le produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \Pi_{j=1}^{n} X_j$ est fini et comporte $|X_1| \times |X_2| \times \ldots \times |X_n| = \Pi_{j=1}^{n} |X_j|$ éléments. Le cardial du produit cartésien est égal au produit des cardinaux de chacun des ensembles.

- Cas d'un ensemble fini dupliqué un nombre fini de fois

Dans le cas où $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, on fait n copies du même ensemble X fini non vide. On note $X^n = X \times X \times \ldots \times X$ ce produit cartésien. Il comporte $|X^n| = |X|^n$ éléments. Cet exemple introduit l'exponentiation comme nouvelle opération en vue des dénombrements.

- Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre

On se donne deux ensembles finis non vides et $\mathscr{A}(X, Y) = Y^X$ l'ensemble des applications de X dans Y. Le nombre de telles aplications est égal au cardinal de Y élevé à une puissance égale au cardinal de X : $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.
Si on pose $X = \{1, 2, \ldots, p\}$ et $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour fixer les idées, on doit d'abord se donner $f(1)$ comme élément de Y. Il y a bien sûr n choix possibles. À chacun de ces choix, nous pouvons faire n nouveaux choix pour $f(2)$, ce qui conduit à n^2 choix pour les deux premières images. Alors de proche en proche, et on peut formaliser cette preuve à l'aide d'un raisonnement par récurrence qui est laissé au lecteur, on dispose de $n \times n \times \ldots \times n = n^p$ choix

François Dubois, octobre 2021.

possibles pour les valeurs de $f(1)$ à $f(p)$. Il y a n^p applications différentes de $\{1, 2, ..., p\}$ dans $\{1, 2, ..., n\}$.
On peut par exemple lister toutes les applications de $X = \{1, 2\}$ dans $Y = \{a, b, c\}$. Nous constations que les couples $\big(f(1), f(2)\big)$ des images décrivent l'ensemble
$\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ qui comporte $9 = 3^2$ éléments.

- Nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments

On se donne à nouveau $X = \{1, 2, ..., p\}$ pour fixer les idées. L'ensemble d'arrivée Y comporte $n \geq p$ éléments. On se donne d'abord $f(1)$. Il y a n choix possibles. Puis, pour chacun de ces choix, on se donne $f(2)$. Mais cette nouvelle image ne doit pas être égale à la première puisqu'on suppose l'application f injective. On a donc seulement $(n-1)$ possibilités et le nombre total de possibilités pour les deux premières images est au total de $n\,(n-1)$. Pour la troisième image $f(3)$, on doit éviter les choix faits pour $f(1)$ et $f(2)$, ce qui laisse $(n-2)$ choix possibles. Ainsi, de proche en proche, le nombre total d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $n\,(n-1) \ldots \big(n-(p-1)\big)$.
On pose $A_n^p = n\,(n-1) \ldots \big(n-(p-1)\big)$. Ce nombre est appelé classiquement "nombre d'arrangements de n éléments pris p à p". C'est le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. C'est aussi le nombre de listes ordonnées de p éléments choisis parmi n. On a toujours $p \leq n$. On remarque aussi que le nombre A_n^p est un produit de p facteurs.

- Nombre de bijections entre deux ensembles finis

On se donne un ensemble fini X tel que $|X| = n$ avec n entier supérieur ou égal à un. On se donne un second ensemble fini Y de sorte qu'il existe une bijection de X sur Y. Alors $|X| \leq |Y|$ car l'application est injective. De plus, $|Y| \leq |X|$ car elle est surjective. Donc les deux ensembles X et Y ont même cardinal : $|X| = |Y| = n$.
Le nombre de bijections est égal au nombre d'injections A_n^n puisqu'une injection entre deux ensembles ayant le même nombre d'éléments est nécessairement bijective. Le nombre A_n^n est doté d'une notation particulière. On pose $n! = A_n^n = 1 \times 2 \times \ldots (n-1)\,n$. La notation $n!$ se lit "factorielle n". C'est le nombre de bijections d'un ensemble à n éléments dans lui même.
On observe que le nombre factorielle n croît très vite avec l'entier n puisqu'on a $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, *etc.* On observe que $n! = n\,((n-1)!)$. Cette relation de récurrence permet un calcul du nombre $n!$ de proche en proche. Il est également très pratique de poser $0! = 1$.
On peut écrire le nombre A_n^p avec la notation factorielle. On a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

- Permutations d'un ensemble à n éléments

Numéroter les éléments de l'ensemble X tel que $|X| = n$, c'est aussi se donner une bijection de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ sur l'ensemble X. C'est quasiment la même chose que de se donner une permutation des éléments de l'ensemble X dans lui-même, c'est à dire une bijection de l'ensemble X sur lui-même.
Par exemple avec $n = 3$ et $X = \{a, b, c\}$, on dispose de six permutations structurées de la façon suivante. On a d'abord l'identité id qui ne change aucun des éléments :

$\mathrm{id}(x) = x$ pour tout $x \in \{a, b, c\}$. On a ensuite les transpositions qui échangent deux éléments et laissent le troisième fixe. On a ainsi la transposition τ_{ab} qui échange a et b: $\tau_{ab}(a) = b$, $\tau_{ab}(b) = a$ et $\tau_{ab}(c) = c$, la transposition τ_{bc} qui échange les lettres b et c: $\tau_{bc}(b) = c$, $\tau_{bc}(c) = b$ et $\tau_{bc}(a) = a$ et pour terminer enfin la transposition τ_{ca} qui laisse fixe la lettre b: $\tau_{ca}(c) = a$, $\tau_{ca}(a) = c$ et $\tau_{ca}(b) = b$. On dispose enfin des cycles de longueur 3, appelés aussi permutations circulaires, qu'on écrit typiquement de la façon suivante : $a \longmapsto b \longmapsto c \longmapsto a$ et $a \longmapsto c \longmapsto b \longmapsto a$. On retrouve bien un total de $1+3+2 = 6 = 3!$ permutations pour un ensemble de trois éléments.

• Combinaisons de p éléments distincts dans un ensemble à n éléments

On se donne un entier $n \geq 1$ et un entier p compris entre 0 et n. Le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{p}$ ou C_n^p. Il est très facile à calculer dans plusieurs cas particuliers : $\binom{n}{0} = 1$ puisqu'on a une seule partie vide, $\binom{n}{n} = 1$ car on dispose d'une seule partie pleine qui contient tous les éléments et $\binom{n}{1} = n$ car il y a autant de singletons que d'éléments dans l'ensemble fini à n éléments.

• Triangle de Pascal

Cette méthode pour calculer les coefficients $\binom{n}{p}$ était déjà connue des mathématiciens iraniens comme al-Karaji (953-1029) ou Omar Khayyam (1048-1131), au Maghreb avec Ibn al-Banna (1256-1321) et en Chine (Yang Hui, 1238-1298). En occident, il était connu de Peter Apian (1495-1552), Michael Stifel (1486-1567), Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557), François Viète (1540-1603) et Marin Mersenne (1588-1648), avant le *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal (1623-1662).

Pour n nombre entier supérieur ou égal à 1 et p entier tel que $0 \leq p \leq n$, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$. Cette relation se démontre par récurrence sur n. Il suffit de considérer les parties à p éléments contenant ou pas un élément donné. Cette relation du triangle arithmétique permet surtout de calculer de proche en proche les coefficients $\binom{n}{p}$ avec un tableau triangulaire. On peut même rajouter la valeur $\binom{0}{0} = 1$ dans le tableau.

n \ p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Calcul des coefficients $\binom{n}{p}$ pour $0 \leq p \leq n$ à l'aide du triangle de Tartaglia-Pascal

On constate et on démontre facilement par récurrence que les coefficients $\binom{n}{p}$ sont effectievemnt des nombres entiers.

• Expression des coefficients $\binom{n}{p}$ à l'aide de factorielles

Si n est un entier positif ou nul et p un autre entier tel que $0 \leq p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$.
La preuve se fait par récurrence sur n et utilise de façon fondamentale la relation

$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ qui permet le calcul de ces coefficients.
En changeant p en $(n-p)$ dans l'expression $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, on trouve la relation $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$, valable pour $0 \leq p \leq n$.

• Lien entre les combinaisons et les arrangements
Des relations $A_n^p = \frac{n!}{p!}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, on déduit que $\frac{1}{p!} A_n^p = \binom{n}{p}$ est un nombre entier. Pour construire une liste de p objets parmi n, on choisit d'abord l'ensemble des p objets que l'on veut lister et il y a $\binom{n}{p}$ possibilités. Puis on range les p objets choisis dans un ordre arbitraire. Pour chacun des choix précédents, il y a $p!$ possibilités. On en déduit que $A_n^p = p!\,\binom{n}{p}$, ce qui établit le résultat.

• Formule du binôme de Newton
Proposée par Isaac Newton (1642-1727), elle énonce que dès que deux nombres a et b commutent pour la multiplication ($a\,b = b\,a$), alors pour tout entier naturel n, on a
$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots + b^n$. On peut aussi l'écrire
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k$. Elle est claire si $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = 2$, elle est bien connue du lecteur puisque $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$. On la montre par récurrence sur l'entier n. Si elle est vraie à l'ordre n, on doit calculer $(a+b)^{n+1}$ avec l'expression obtenue en changeant n en $(n+1)$ dans l'expression précédente, c'est à dire
$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n\,b + \ldots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\,b^k + \ldots + b^{n+1}$. Or
$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n = (a+b)\left[a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^k + \ldots + b^n\right]$
d'après l'hypothèse de récurrence. On développe avec soin cette expression :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\,b^k + a\,b^n + a^n b + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\,b^{k+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\,b^k + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} a^{n-\ell}\,b^{\ell+1} + b^{n+1} \quad \text{car } k \text{ est une variable muette} \\
&= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\,b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\,b^k + b^{n+1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en posant } k = \ell + 1 \text{ dans la seconde somme} \\
&= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k}\,b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\,b^k + b^{n+1}
\end{aligned}
$$

car $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Le résultat est donc établi par récurrence.
À cause de leur présence dans la formule du binôme, les coefficients $\binom{n}{p}$ sont appelés “coefficients du binôme”.

• Nombre de parties d'un ensemble à n éléments
On se donne n entier ≥ 1 et $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Une partie quelconque de X comporte zéro, un, deux, ... ou n éléments. Le cardinal de $\mathscr{P}(X)$, nombre total de sous-ensembles de l'ensemble X, est donc égal à $1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + n + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. En prenant $a = b = 1$ dans la formule du binôme, nous venons d'établir que $|\mathscr{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| = 2^n$.

Exercices

- Tiercés

Un joueur joue au tiercé et parie dans un premier temps 100 fois l'arrivée de trois chevaux dans le désordre. Tous ses paris sont différents.

a) Que peut-on dire du nombre de chevaux dans la course ?

b) Même question mais cette fois le joueur a parié l'arrivée des chevaux dans l'ordre.

- Rangement

Un étudiant range sur une étagère ses 14 livres, dont 4 de mathématiques, 5 d'économie, 3 de philosophie et 2 d'anglais. De combien de façons peut-il les ranger, en prenant en compte les contraintes suivantes :

a) ne pas tenir compte de l'ordre des matières,

b) il range d'abord l'anglais, puis l'économie, puis les mathématiques en enfin la philosophie,

c) il range ses livres par matière, sans imposer *a priori* l'ordre des matières ?

- Cartes

Un jeu de 32 cartes comporte quatre couleurs dont deux couleurs rouges et deux couleurs noires ; on compte huit cartes différentes par couleur.

a) De combien de façons peut-on choisir trois cartes rouges ?

b) Même question, avec la contrainte que la main de trois cartes doit comporter au moins une carte "cœur".

c) De combien de façons peut-on choisir six cartes de sorte d'avoir trois cartes noires, trois cartes "cœur" et aucun "as" ?

- Agencement

On se donne un entier $n \geq 1$. On dispose de $(n+1)$ boules numérotées à placer dans n boîtes distinctes et numérotées.

1) On suppose dans cette question $n = 3$.

a) On suppose que seules les boîtes numérotées "1" et "2" reçoivent au moins une boule. Combien y-a-il de façons de procéder ?

b) On suppose que toutes les boîtes reçoivent au moins une boule ; donc une des boîtes en reçoît deux. Combien y-a-il de façons de procéder ?

2) Mêmes questions avec $n \geq 2$.