le cnam

Algèbre de Boole, probabilités et arithmétique

Cours 3 Ensembles

- Égalité

Le symbole d'égalité "=" entre deux objets mathématiques, deux "ensembles", a été introduit par Robert Recorde au 16e siècle. On a déjà vu que la relation $\big(\forall x, (x = x)\big)$ est toujours vraie.

Théorème. Si on se donne une relation paramétrée $R(x)$ et deux objets mathématiques u et v de sorte que $u = v$, alors la relation $(R(u) \Leftrightarrow R(v))$ est vraie.

- Propriétés fondamentales de l'égalité

L'égalité satisfait aux trois propriétés fondamentales suivantes :
1) réflexivité : la relation $(x = x)$ est vraie pour tout x.
2) symétrie : pour tout x et pour tout y, les relations $(x = y)$ et $(y = x)$ sont équivalentes. En d'autres termes, la relation $\big(\forall x, \forall y, ((x = y) \Leftrightarrow (y = x))\big)$ est toujours vraie.
3) transitivité : pour tout x, pour tout y et pour tout z, les relations $(x = y)$ et $(y = z)$ impliquent la relation $(x = z)$. De façon plus formelle, la relation
$\big(\forall x, \forall y, \forall z, (((x = y) \,\mathrm{et}\, (y = z)) \Rightarrow (x = z))\big)$ est vraie.

- Appartenance

Les notions d'ensemble et d'appartenance permettent de préciser le contexte mathématique d'une étude. Si on considère une collection donnée d'objets mathématiques, les objets sont appelés "éléments" et la collection "ensemble". On note souvent avec une minuscule un élément a de l'ensemble E qui a droit, lui, à une lettre majuscule. On énonce que l'élément a appartient à l'ensemble E et on écrit symboliquement $a \in E$. On peut aussi écrire $(E \ni a)$ qui exprime exactement la même propriété dans une lecture de droite à gauche : "l'ensemble E contient l'élément a".
Pour exprimer que l'objet a n'appartient pas à l'ensemble E, on écrit la négation logique de $(a \in E)$. La relation $(\mathrm{non}\,(a \in E))$ se note $(a \notin E)$. Toutes ces notations ont été introduites par Giuseppe Peano au 19e siècle.

- Égalité de deux ensembles

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Théorème. On se donne deux ensembles A et B. On a l'égalité $(A = B)$ si et seulement si les relations $(x \in A)$ et $(x \in B)$ sont équivalentes : la relation $\big((A = B) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))\big)$ est vraie.

Dans l'équivalence qui précède, la lettre x est une "variable muette". Elle est située d'un seul côté de l'équivalence principale et on peut la changer pour une autre lettre sans changer le nom des lettres des deux ensembles. On a par exemple : $\big((A = B) \Leftrightarrow (\forall y, (y \in A) \Leftrightarrow (y \in B))\big)$.

François Dubois, octobre 2023.

Les variables A et B au contraire sont des "variables parlantes". Elles figurent de chaque côté de l'équivalence principale ; si on change par exemple le nom de l'ensemble B dans le membre de gauche de l'équivalence (ou dans une égalite), on doit le changer aussi dans le membre de droite. On peut ainsi écrire la relation précédente sous la forme $\big((A = C) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \Leftrightarrow (x \in C))\big)$.

- Parties d'un ensemble, sous-ensembles

On se donne deux ensembles A et B. Par définition, on dit que A est inclus dans B, et on note $A \subset B$, le fait que tout élément de A est également un élément de B:
$\big((A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in A) \Rightarrow (x \in B))\big)$. La négation de l'inclusion $A \subset B$ s'écrit $A \not\subset B$ et dans ce cas, il existe au moins un élément de l'ensemble A qui n'appartient pas à l'ensemble B. On peut aussi écrire cette relation de droite à gauche : $B \supset A$ se lit "B contient A" et signifie exactement $A \subset B$.
Exemple. On désigne par $B = \{\text{a, b, c, d}, \dots\}$ l'ensemble de toutes les lettres de l'alphabet. Si on note $A = \{\text{a, b, c}\}$, alors on a $A \subset B$.
Les notations $\subset$ et $\supset$ ont été proposées par Ernst Schröder à la fin du 19e siècle.

- Décrire un ensemble en extension ou en compréhension

Si on veut écrire que l'ensemble A est composé des trois lettres a, b et c, on écrit les trois éléments a, b et c dans un ordre arbitraire et on place des accolades de part et d'autre : on a pour l'exemple précédent $A = \{\text{a, b, c}\}$. On dit que l'ensemble A est défini "en extension" : on a simplement donné la liste de tous ses éléments. Pour le second ensemble B, on n'a pas eu le courage d'écrire *in extenso* $B = \{\text{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}\}$ et on a défini l'ensemble B par une phrase qui le caractérise ; on dit qu'on a défini l'ensemble B "en compréhension".

Théorème. On se donne une relation paramétrée $R(x)$ et un ensemble donné X. Il existe un et un seul sous ensemble A de X tel qu'on a la relation $(x \in A)$ si et seulement si l'objet x appartient à l'ensemble X $(x \in X)$ et de plus la relation $R(x)$ est vraie. On écrit l'ensemble A en compréhension : $A = \{x \in X, R(x)\}$ et le mot "vrai" est sous-entendu dans la pratique courante ; il faut lire en fait $A = \{x \in X, R(x) \text{ est vrai}\}$. Notons que l'on ne peut pas se passer de l'ensemble X qui sert de référentiel et permet de fixer le contexte de l'étude.
Par exemple, l'ensemble $P = \{0, 2, 4, \dots\}$ des nombres pairs est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

- L'ensemble de tous les ensembles n'existe pas

De la même façon qu'on peut se demander si le catalogue d'une bibliothèque est un des livres de la bibliothèque, la notion d'ensemble permet de définir un cadre, un contexte. Ce résultat négatif exprime qu'il n'existe pas de "contexte universel".
La preuve de cette propriété demande un raisonnement par l'absurde. On suppose que l'ensemble de tous les ensembles existe. On va aboutir à une contradiction, c'est à dire une propriété à la fois vraie et fausse. On en déduira que l'hypothèse d'existence d'un ensemble de tous les ensembles est fausse, c'est à dire que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.
Soit E l'ensemble de tous les ensembles et A le sous ensemble de E défini de la (curieuse) façon qui suit : $A = \{x \in E, x \notin x\}$. Que dire de la relation $(A \in A)$? Si elle est vraie, alors

$A \notin A$ par définition même de A et la relation $(A \in A)$ est fausse. Si la relation $(A \in A)$ est fausse et que $A \notin A$, alors $A \in A$ et la relation est vraie ! Nous avons mis en évidence une relation à la fois vraie et fausse, ce qui établit une contradiction logique car aucune proposition ne peut être à la fois vraie et fausse. Donc l'hypothèse proposée de l'existence de l'ensemble de tous les ensembles est fausse. En conclusion, l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Complémentaire

On se donne un ensemble X et une partie $A \subset X$ de cet ensemble. Le complémentaire de A dans l'ensemble X désigne le sous ensemble de X formé des éléments qui n'appartiennent pas à la partie A : $\complement_X A = \overline{A} = X \backslash A = A^{\mathrm{c}} = \{x \in X, x \notin A\}$. On note que les auteurs ne se sont pas mis d'accord pour adopter un symbole unique pour le complémentaire.

Complémentaire du complémentaire. Si A est une partie de l'ensemble X, alors le complémentaire de son complémentaire est égal à A : $X \backslash (X \backslash A) = A$, relation qu'on peut écrire aussi $(A^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le contexte.

Inclusion et complémentaire. On suppose que les deux ensembles A et B sont inclus dans un même ensemble X. On a l'équivalence logique : $(A \subset B) \Leftrightarrow ((X \backslash B) \subset (X \backslash A))$.

- Représentation graphique

La représentation naïve mais tout à fait efficace des ensembles à l'aide de "patates" ou "diagrammes de Venn" (du nom de leur inventeur John Venn, 1834-1923) est utilisée dans ce cours, même si on en verra peu dans ces notes !

- Ensemble vide

On se donne un ensemble X. Par définition du complémentaire, le complémentaire dans X de l'ensemble X lui-même est l'ensemble des x qui satisfont à la fois aux relations $x \in X$ et $x \notin X$. Comme ces deux relations sont contradictoires, aucun objet x n'appartient à cet ensemble qui se nomme pour cette raison "ensemble vide".

On peut démontrer que l'ensemble vide ne dépend pas de l'ensemble X initial. Cette propriété lui donne un caractère universel et on le note $\varnothing$. On retiendra que la relaton $\big(\forall x, (x \in \varnothing)\big)$ est fausse et que l'ensemble vide ne contient aucun élément. Sa mise en évidence est à mettre en regard de l'invention du zéro, et en particulier du symbole "0", par Brahmagupta dans l'Inde du sixième siècle de notre ère.

- Ensembles à un élément, ou singletons

On se donne un objet mathématique x quelconque. Il existe un ensemble $\{x\}$ formé de l'unique élément x. On a, pour tout objet y, $y \in \{x\}$ si et seulement si $y = x$. Un ensemble contenant un unique élément s'appelle un "singleton".

Exemple d'ensemble X à un élément. Il est composé de l'unique objet "ensemble vide" et on a dans ce cas $X = \{\varnothing\}$. Le rôle des accolades est tout à fait important pour bien distinguer l'ensemble des divers éléments qui le composent.

L'égalité des deux ensembles $\{x\} = \{y\}$ est équivalente à l'égalité des deux objets x et de y. La relation $\big(\forall x, \forall y, (\{x\} = \{y\}) \Leftrightarrow (x = y)\big)$ est vraie.

Théorème. Un ensemble X est un singleton si et seulement si d'une part $X \neq \varnothing$ et d'autre part, pour tout x et y appartenant à X, on a $x = y$.

- Ensembles à deux éléments, ou paires

On se donne deux objets mathématiques distincts. On note $\{x, y\}$ l'ensemble formé de ces deux éléments. On a $z \in \{x, y\}$ si et seulement si $(z = x)$ ou $(z = y)$. Un ensemble contenant deux éléments s'appelle une "paire".
Exemple. On a bien fait attention que l'ensemble vide $\varnothing$ est distinct du singleton $\{\varnothing\}$ vu plus haut. On peut donc considérer la paire $\big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$ composée de ces deux objets distincts.
Si deux objets sont identiques quand on donne la liste des élements d'un ensemble, on peut retirer l'une des étiquettes de la liste. Ainsi, l'ensemble $\{x, x\}$ n'est pas une paire, mais simplement le singleton $\{x\}$.

- Ensemble des parties d'un ensemble donné

On se donne un ensemble X quelconque. L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X est composé de tous les sous-ensembles de X. On a l'équivalence suivante : $\big((Y \in \mathscr{P}(X)) \Leftrightarrow (Y \subset X))\big)$.
On observe qu'on a toujours $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$ et $X \in \mathscr{P}(X)$.
Quelques exemples. On a $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathscr{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, ce qui permet de réintroduire les ensembles à un et deux éléments présentés plus haut. Mais on a aussi
$\mathscr{P}\big(\{\varnothing, \{\varnothing\}\big) = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\}$, ce qui montre que l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments comporte lui-même quatre éléments. Enfin, avec des notations plus légères, en énumérant les parties à 0, 1, 2 et 3 éléments, on établit sans difficulté que
$\mathscr{P}\big(\{a, b, c\}\big) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\big\}$.

- Réunion et intersection

La réunion, notée $\cup$, et l'intersection, notée $\cap$, sont la transposition dans le langage de la théorie des ensembles, du "ou" et du "et " de la logique. Ces notations ont été introduites par Hermann Grassmann au 19e siècle.
Axiome de la réunion. On se donne deux ensembles X et Y. On admet sans démonstration qu'il existe toujours un nouvel ensemble $(X \cup Y)$ qui est la réunion des ensembles X et Y. Si z est un objet quelconque, $(z \in (X \cup Y))$ si et seulement si $\big((z \in X)$ ou $(z \in Y)\big)$. On peut dire également que la relation $\big(\forall X, \forall Y, \forall z, ((z \in (X \cup Y)) \Leftrightarrow ((z \in X) \text{ ou } (z \in Y)))\big)$ est vraie.
La réunion $(X \cup Y)$ est également le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion) qui contient à la fois les ensembles X et Y.
L'intersection $(X \cap Y)$ des ensembles X et Y est un nouvel ensemble défini par le fait que si z est un objet quelconque, on a $(z \in (X \cap Y))$ si et seulement si $\big((z \in X)$ et $(z \in Y)\big)$. On peut écrire aussi que la relation $\big(\forall X, \forall Y, \forall z, ((z \in (X \cap Y)) \Leftrightarrow ((z \in X) \text{ et } (z \in Y)))\big)$ est vraie.
Nous remarquons que l'intersection $(X \cap Y)$ est le plus grand ensemble (au sens de l'inclusion) contenu à la fois dans les ensembles X et Y.
On dit que les ensembles X et Y sont disjoints lorsque leur intersection $(X \cap Y)$ est vide.
On a toujours $X \subset (X \cup Y)$, $Y \subset (X \cup Y)$, $(X \cap Y) \subset X$ et $(X \cap Y) \subset Y$.

- Règles de calcul avec les symboles de réunion et d'intersection

Ces règles sont directement conséquence des propriétés algébriques des opérateurs logiques "non", "ou" et "et" exposées lors de la première leçon.
Dans le paragraphe qui suit, les ensembles X, Y et Z sont absolument quelconques.

Rôle de l'ensemble vide : $X \cup \varnothing = X$, $X \cap \varnothing = \varnothing$.
Idempotence de $\cup$ et de $\cap$: $X \cup X = X$, $X \cap X = X$.
Commutativité de $\cup$ et de $\cap$: $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$.
Associativité de $\cup$ et de $\cap$: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$, $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$.
Distributivité de la réunion $\cup$ par rapport à l'intersection $\cap$: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.
Distributivité de l'intersection $\cap$ par rapport à la réunion $\cup$: $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
Lois de De Morgan. On suppose maintenant que les deux ensembles X et Y sont inclus dans un ensemble E et tous les complémentaires sont à considérer relativement à l'ensemble E. On a $(X \cup Y)^{\mathrm{c}} = X^{\mathrm{c}} \cap Y^{\mathrm{c}}$ et $(X \cap Y)^{\mathrm{c}} = X^{\mathrm{c}} \cup Y^{\mathrm{c}}$.

- Entiers naturels

Au lieu de noter les entiers naturels, les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$, avec les symboles usuels $0, 1, 2$, *etc.*, on pourrait très bien remplacer 0 par $\varnothing$, 1 par $\{\varnothing\}$, 2 par $\big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$, le nombre 3 par $\big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\}$, *etc.* Mais c'est une notation très peu pratique ! Toutefois le successeur $S(n)$ de l'entier n se définit alors assez simplement : $S(n) = n \cup \{n\}$.

- En guise de conclusion

On voit que la théorie des ensembles doit affronter pour exister à la fois le vide et l'infini, comme le montre l'exemple des nombres entiers naturels au paragraphe précédent. L'inventeur de cette théorie, Georg Cantor (1845-1918), a dû intoduire la notion de "nombre cardinal" pour désigner le "nombre d'éléments d'un ensemble éventuellement infini". Nous reparlerons des cardinaux dans une prochaine leçon. Surtout, il a démontré l'inégalite stricte suivante : $(\sharp\,\mathscr{P}(X)) > (\sharp X)$ quel que soit l'ensemble X. Nous retenons que, même si l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ de ses parties comportent une infinité d'éléments, il y a "beaucoup plus" de parties de $\mathbb{N}$ que de nombres entiers naturels !

Lois de De Morgan sous forme ensembliste visibles depuis le square Russell à Londres

Exercices

• Inclusion et complémentaire

On suppose que les deux ensembles A et B sont inclus dans un même ensemble X. Démontrer l'équivalence : $(A \subset B) \Leftrightarrow ((X \backslash B) \subset (X \backslash A))$.

• Nombre de parties d'un ensemble fini

On se donne un entier naturel n et un ensemble fini X qui comporte n éléments. On note $|X|$, ou éventuellement $\sharp X$, le nombre d'éléments de X (on dit aussi le cardinal de X).

Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que si X comporte n éléments, alors $\sharp \mathscr{P}(X) = 2^n$: $(|X| = n) \Rightarrow (\sharp \mathscr{P}(X) = 2^n)$.

• Règles de calcul avec les symboles de réunion et d'intersection

Dans cet exercice, les ensembles X, Y et Z sont absolument quelconques. Lorsqu'on introduit la complémentarité, on suppose que les deux ensembles X et Y sont inclus dans un même ensemble E et tous les complémentaires sont à considérer relativement à l'ensemble E.

En revenant aux définitions et en utilisant les propriétés des opérateurs logiques "non", "ou" et "et", démontrer les relations suivantes :

a) $X \cup \varnothing = X$ et $X \cap \varnothing = \varnothing$,

b) $X \cup X = X$ et $X \cap X = X$,

c) $X \cup Y = Y \cup X$ et $X \cap Y = Y \cap X$,

d) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ et $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$,

e) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ et $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,

f) $(X \cup Y)^{\mathrm{c}} = X^{\mathrm{c}} \cap Y^{\mathrm{c}}$ et $(X \cap Y)^{\mathrm{c}} = X^{\mathrm{c}} \cup Y^{\mathrm{c}}$.

• Cardinal de la rénion de deux ensembles finis

Si X est un ensemble qui comporte un nombre fini d'éléments, on désigne par $|X|$ son cardinal, c'est à dire le nombre de ses éléments. On admet ici la relation qui exprime que le cardinal de la réunion de deux ensembles finis est égal à la somme des cardinaux de ces deux ensembles s'ils sont disjoints : $((X \cap Y) = \varnothing) \Rightarrow (|X \cup Y| = |X| + |Y|)$. Cette relation peut même être considérée comme une définition de l'addition !

a) Montrer que si X, Y et Z sont trois ensembles quelconques, alors l'implication suivante $\big(((X \cap Y) = \varnothing), ((Y \cap Z) = \varnothing), ((Z \cap X) = \varnothing\big) \Rightarrow (|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z|)$ est vraie.

On pose $X_1 = X \backslash (X \cap Y)$, complémentaire de l'intersection $(X \cap Y)$ relativement à X et
$Y_1 = Y \backslash (X \cap Y)$, complémentaire de l'intersection $(X \cap Y)$ relativement à Y.

b) Faire un diagramme de Venn pour représenter les ensembles $(X \cap Y)$, X_1 et Y_1.

c) Montrer que $|X| = |X \cap Y| + |X_1|$ et $|Y| = |X \cap Y| + |Y_1|$.

d) Démontrer que les intersections $\big((X \cap Y) \cap X_1\big)$, $\big((X \cap Y) \cap Y_1\big)$ et $(X_1 \cap Y_1)$ sont toutes les trois égales à l'ensemble vide.

e) Établir l'égalité entre ensembles $X \cup Y = (X \cap Y) \cup X_1 \cup Y_1$. On pourra remarquer que $(X \cap Y) \cup X_1 \cup Y_1 = (X_1 \cup (X \cap Y)) \cup (Y_1 \cup (X \cap Y))$.

f) Démontrer, en utilisant les questions précédentes, que si X et Y sont deux ensembles finis quelconques, on a l'égalité entre nombres entiers suivante : $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$.