le cnam

**Département de Mathématiques et Statistiques**

**Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)**

**Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, le 14 décembre 2021**

## Introduction aux problèmes elliptiques

On désigne par $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$. On note $\partial\Omega$ sa frontière qu'on suppose régulière et $\overline{\Omega}$ son adhérence composée de la réunion de l'ouvert $\Omega$ et de la frontière $\partial\Omega$.

Soit $f$ une fonction donnée de $\overline{\Omega}$ à valeurs réelles. On s'intéresse au problème suivant : chercher une fonction $u$ de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que $-\Delta\, u = f$ dans $\Omega$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ce problème s'appelle le problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson. Si $v$ et $w$ sont deux fonctions régulières de l'ouvert $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $n$ la normale extérieure à $\partial\Omega$, on rappelle que $\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v \,.\, n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j}\, n_j$.

a) Montrer que $-\int_\Omega \Delta v \; w \,\mathrm{d}x \;=\; \int_\Omega \nabla v \,.\, \nabla w \;\mathrm{d}x \;-\; \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}\; w \;\mathrm{d}\gamma$.

Soient $u$ et $v$ deux fonctions solutions du problème $-\Delta\, u = f$ dans $\Omega$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Quel système d'équations vérifie la différence $\varphi \equiv u - v$ ?

b) En déduire que pour toute fonction $w$ nulle sur le bord de $\Omega$, on a $\int_\Omega \nabla\varphi \,.\, \nabla w \,\mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire que la fonction $\varphi$ est identiquement nulle et que le problème de Dirichlet $-\Delta\, u = f$ dans $\Omega$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ a au plus une solution régulière.

On se propose de déterminer explicitement la solution du problème de Dirichlet $-\Delta\, u = f$ dans $\Omega$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ dans le cas d'une seule dimension spatiale. On pose $\Omega = ]0,\, 1[$ pour fixer les idées. On définit la fonction $G(x,\, \xi)$ par les relations $G(x,\, \xi) = \xi\,(1 - x)$ si $\xi \leq x$ et $G(x,\, \xi) = (1 - \xi)\, x$ si $\xi \geq x$.

d) Montrer que la fonction $u$ définie pour $0 \leq x \leq 1$ par $u(x) = \int_0^1 G(x,\, \xi)\, f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ est une solution du problème $-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f,\ u(0) = u(1) = 0$.

François Dubois, 30 novembre 2021.