le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 14 Introduction à la dérivation d'ordre un demi

- Position du problème

On note D^1 l'opérateur de dérivation ususuelle, c'est à dire $\big(\mathrm{D}^1 f\big)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. On cherche un opérateur linéaire $\mathrm{D}^{1/2}$ tel que $\mathrm{D}^{1/2} \circ \mathrm{D}^{1/2} = \mathrm{D}^1$: $\big[\mathrm{D}^{1/2}\big(\mathrm{D}^{1/2} f\big)\big](x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour toute fonction dérivable f et tout argument x. Ce problème est posé en des termes très voisins par l'inventeur du calcul différentiel, Gottfried Leibniz, dans des correspondances (en Français !) de 1695.

- Action sur la transformation de Fourier

Nous avons déjà vu que si on se donne une fonction f intégrable telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable, c'est à dire $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué de la transformée de Fourier :
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\xi\,x)\, \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $x \in \mathbb{R}$. On en déduit par dérivation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, i\,\xi\, \exp(i\,\xi\,x)\,\mathrm{d}\xi$. La dérivation devient une multiplication par $i\,\xi$ en variable de Fourier : $\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}^1 f\big)\big](\xi) = i\,\xi\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$.
Il suffit alors de chercher un opérateur $\mathrm{D}^{1/2}$ de sorte que $\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \sqrt{i\,\xi}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$. Rappelons que la racine carrée $\sqrt{z}$ d'un nombre complexe z est définie avec la "détermination principale de la racine carrée" qui exclut l'axe réel négatif. Pour $z = \rho\,\exp(i\,\theta)$ avec $\rho \geq 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, on pose $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\,\exp\big(i\,\frac{\theta}{2}\big)$.

- Intégrateur d'ordre un demi

Dans la leçon précédente, nous avons introduit l'intégrateur $\mathrm{I}^{1/2}$ d'ordre un demi :
$\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}}\, f(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}}\, f(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Il vérifie les relations
$\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\,\xi}}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$ et $\big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](t) = \int_0^t f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Pour les fonctions puissances $t \longmapsto t^\alpha\, H(t)$, avec $\alpha > -1$, H la fonction de Heaviside et Γ la fonction gamma d'Euler, nous avons établi la relation $\mathrm{I}^{1/2}\big(t^\alpha\, H(t)\big) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)}\, t^{\alpha+1/2}\, H(t)$.

- Dérivée d'ordre un demi de Riemann-Liouville

Elle a été proposée par Joseph Liouville (1832) et par Bernhard Riemann (1847). La dérivée d'ordre un demi $\mathrm{D}_{RL}^{1/2}$ est défini par $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} f\big)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}}\, f(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big]$.

En termes d'opérateurs agissant sur des fonctions, on a simplement $\mathrm{D}_{RL}^{1/2} = \mathrm{D}^1 \circ \mathrm{I}^{1/2}$.

On dispose alors de la relation $\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \sqrt{i\,\xi}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$. En effet, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} f\big)\big](\xi) &= \big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}^1 \circ \mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}^1\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big)\big](\xi) = i\,\xi\,\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) \\ &= i\xi\,\frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi) = \sqrt{i\,\xi}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi).\end{aligned}$$ □

François Dubois, janvier 2022.

- Dérivée d'ordre un demi de Caputo

Michele Caputo (né en 1927) a proposé en 1967 la définition suivante $\big(\mathrm{D}_C^{1/2} f\big)(t) = \big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\big)\big](t)$, c'est à dire $\big(\mathrm{D}_C^{1/2} f\big)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}}\, f'(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}}\, f'(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. En termes d'opérateurs linéaires, on a donc $\mathrm{D}_C^{1/2} = \mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{D}^1$.

La dérivée d'ordre un demi de Caputo vérifie elle aussi la relation $\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}_C^{1/2} f\big)\big](\xi) = \sqrt{i\,\xi}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$. En effet, on a la suite d'égalités :

$\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}_C^{1/2} f\big)\big](\xi) = \big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{D}^1 f\big)\big](\xi) = \big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2}(\mathrm{D}^1 f)\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\,\xi}}\,\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{D}^1 f\big)\big](\xi)$

$= \frac{1}{\sqrt{i\,\xi}}\,(i\xi)\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi) = \sqrt{i\,\xi}\,\big(\mathscr{F} f\big)(\xi)$, ce qui établit la propriété. $\square$

- Relations entre les dérivée d'ordre un demi de Riemann-Liouville et de Caputo

Si la fonction f est assez régulière, les deux dérivées $\mathrm{D}_{RL}^{1/2} f$ et $\mathrm{D}_C^{1/2} f$ sont définies et on a $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} f\big)(t) = \big(\mathrm{D}_C^{1/2} f\big)(t) + \frac{f(0)}{\sqrt{\pi\,t}}$. En d'autres termes, $\big[\big(\mathrm{D}^1 \circ \mathrm{I}^{1/2} - \mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{D}^1\big) f\big](t) = \frac{f(0)}{\sqrt{\pi\,t}}$.
Nous retenons que les deux définitions coïncident si f est une fonction causale ($f(t) = 0$ si $t < 0$) continue en 0, donc telle que $f(0) = 0$.
On a de plus $\big(\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{D}_C^{1/2} f\big)(t) = f(t) - f(0)$. Soit en termes d'opérateurs, $\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{D}_C^{1/2} = \mathrm{Id} - \delta$, où δ désigne la masse de Dirac : $< \delta, f >= f(0)$.
Enfin, les deux dérivées d'ordre un demi de Riemann-Liouville et de Caputo résolvent ensemble la question de la recherche de la racine carrée de l'opérateur de dérivation puisqu'on a toujours $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} \circ \mathrm{D}_C^{1/2}\big) f = \mathrm{D}^1 f$.

- Exemples de calculs de dérivées d'ordre un demi

On rappelle que H désigne la fonction de Heaviside. On a les relations suivantes pour la dérivée d'ordre un demi au sens de Caputo des trois fonctions suivantes : $\big(\mathrm{D}_C^{1/2} H\big)(t) = 0$, $\big(\mathrm{D}_C^{1/2}(\sqrt{t}\,H(t))\big)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,H(t)$, $\big(\mathrm{D}_C^{1/2}(t\,H(t))\big)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{t}\,H(t)$. Pour la dérivée d'ordre un demi au sens de Riemann-Liouville, il vient $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2} H\big)(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{t}}$, $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2}(\sqrt{t}\,H(t))\big)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,H(t)$ et $\big(\mathrm{D}_{RL}^{1/2}(t\,H(t))\big)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{t}\,H(t)$. On constate sur ces exemples que si la fonction est causale et continue en zéro, les deux définitions conduisent au même résultat.

Exercices

- Dérivée de Caputo de $t^\alpha H(t)$ pour $\alpha > 0$

a) Compte tenu des résultats déjà établis à la leçon précédente, préciser ce que vaut $\mathrm{I}^{1/2}\big(t^\beta H(t)\big)$ si $\beta > -1$.
b) Pour $\alpha > 0$, quelle est la valeur de $\mathrm{D}^1\big(t^\alpha H(t)\big)$?
c) Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathrm{D}_C^{1/2}\big(t^\alpha H(t)\big)$.

- Exponentielle de Mittag-Leffler

a) On se donne une série u_n à termes strictement positifs de sorte qu'il existe $a \in]0,\,1[$ et un entier K de sorte que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le a$ dès que $n \ge K$. Montrer qu'alors la série u_n est convergente. Ce résultat est connu sous le nom de "critère de d'Alembert".

b) Montrer que si u_n est une série de nombres complexes qui ne s'annulent pas et telle qu'il existe un nombre réel a avec $0 < a < 1$ et un entier K de sorte que $\frac{u_{n+2}}{u_n} \leq a$ dès que $n \geq K$, alors la série de terme général u_n est absolument convergente.
Pour $x \in \mathbb{R}$, l'exponentielle de Mittag-Leffler $E_{1/2}$ est définie par la relation
$E_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$.
c) Que vaut $E_{1/2}(0)$?
d) Montrer que la série qui définit la fonction $E_{1/2}$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
e) On se donne $\lambda > 0$ et un entier $k \geq 1$. Sachant que $\mathrm{D}_C^{1/2}\big(t^\alpha H(t)\big) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)} t^{\alpha-\frac{3}{2}} H(t)$, calculer $\mathrm{D}_C^{1/2}\big[(-\sqrt{\lambda\, t})^k H(t)\big]$.
f) Pour $t \geq 0$, on pose $u(t) = E_{1/2}\big(-\sqrt{\lambda\, t}\big)$. Montrer que cette fonction u satisfait à l'équation semi-différentielle $\mathrm{D}_C^{1/2} u + \sqrt{\lambda}\, u(t) = 0$ si $t > 0$ avec la condition initiale $u(0) = 1$.