le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 13 Introduction à l'intégrale d'ordre un demi

- Rappels sur la transformation de Fourier

On se donne une fonction φ intégrable telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ est également intégrable ($\widehat{\varphi} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$). Alors on peut représenter la fonction φ à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué de la transformée de Fourier : $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\xi\,x)\,\widehat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$.
On en déduit par dérivation $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\xi)\, i\,\xi \exp(i\,\xi\,x)\,\mathrm{d}\xi$. La dérivation devient une multiplication par $i\,\xi$ en variable de Fourier : $\mathscr{F}\big[\big(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\big)\big](\xi) = i\,\xi\,\big(\mathscr{F}\varphi\big)(\xi)$.
On considère maintenant le cas particulier d'une fonction φ qui est une primitive d'une fonction donnée f: $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \equiv (\mathrm{I}^1 f)(x)$. Alors on peut écrire $(\mathscr{F} f)(\xi) = i\,\xi\,\big(\mathscr{F}(\mathrm{I}^1 f)\big)(\xi)$ ou de façon équivalente $\big(\mathscr{F}(\mathrm{I}^1 f)\big)(\xi) = \frac{1}{i\xi}\,(\mathscr{F} f)(\xi)$. Quand on intègre une fonction, sa transformée de Fourier est divisée par $i\,\xi$.
Par ailleurs, la transformation de Fourier transforme un produit de convolution en une multiplication des transformées de Fourier : $\mathscr{F}(K * f) = (\mathscr{F}K)\,(\mathscr{F} f)$.

- Recherche d'une racine carrée de l'opérateur d'intégration

L'intégrale d'ordre un demi cherchée ici est un opérateur $\mathrm{I}^{1/2}$ qui à une fonction f, associe le nombre $\mathrm{I}^{1/2} f$ de sorte que pour toute fonction f, $\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big) = \mathrm{I}^1 f$. On a donc la relation entre opérateurs $\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{I}^{1/2} = \mathrm{I}^1$: la composée de l'intégrale d'ordre un demi avec elle-même est identiquement égale à l'intégrale usuelle.
Si on fait agir l'opérateur de Fourier sur la composée $\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{I}^{1/2}$, il vient alors
$\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{i\xi}\,(\mathscr{F} f)(\xi)$. Il semble suffisant de poser
$\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,(\mathscr{F} f)(\xi)$. Avec ce choix multiplicatif, on a le calcul suivant :
$\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} \circ \mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,\big[\frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,(\mathscr{F} f)(\xi)\big] = \frac{1}{i\xi}\,(\mathscr{F} f)(\xi)$ et la recherche de l'opérateur $\mathrm{I}^{1/2}$ a bien avancé.
Dans la suite, on choisit de définir la racine carrée $\sqrt{z}$ d'un nombre complexe z à l'aide avec la "détermination principale de la racine carrée" qui exclut l'axe réel négatif : si $z = \rho\,\exp(i\,\theta)$ avec $\rho \geq 0$ et $-\pi < \theta < \pi$, on pose $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\,\exp\big(i\,\frac{\theta}{2}\big)$. Si ξ est un nombre réel, on observe que $\sqrt{i\,\xi}$ est un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{4}$ si $\xi > 0$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$ si $\xi < 0$.
Bien entendu, le nombre $-\sqrt{z}$ a également un carré égal à z. Cette fonction de détermination principale de la racine carrée complexe est analytique et permet ensuite des calculs spécifiques qui ne sont pas développés ici mais que le lecteur peut trouver dans les ouvrages d'Henri Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes* (Hermann, Paris, 1975) ou de Walter Rudin *Analyse réelle et complexe* (Masson, Paris, 1975).

François Dubois, décembre 2021.

• Un détour par la fonction gamma

Cette fonction introduite par Euler au 18e siècle est définie pour $x > 0$ par la relation $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \exp(-t)\,\mathrm{d}t$. On vérifie sans peine que l'intégrale correspondante est bien définie et que $\Gamma(0) = 1$. À l'aide d'une intégration par parties, on obtient la relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ qui permet d'établir par récurrence la relation $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La fonction gamma étend la factorielle aux nombres réels et même aux nombres complexes !

• Une définition de l'intégrale d'ordre un demi

Compte tenu des relations $\big[\mathscr{F}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,(\mathscr{F} f)(\xi)$ et $\mathscr{F}(K * f) = (\mathscr{F} K)\,(\mathscr{F} f)$, il suffit maintenant de trouver un noyau de convolution K de sorte que $(\mathscr{F} K)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}$.

Or on a la relation $\big[\mathscr{F}\big(\frac{1}{\sqrt{t}} H(t)\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\xi}}\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$, avec H la fonction de Heaviside définie par $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. Comme $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$, on dispose d'un bon candidat pour le noyau K: $K(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} H(t)$.

La preuve de la relation $\big[\mathscr{F}\big(\frac{1}{\sqrt{t}} H(t)\big)\big](\xi) = \frac{1}{\sqrt{i\pi\xi}}$ demande un calcul par la méthode des résidus qui est une conséquence de l'analyticité de la fonction $z \longmapsto \sqrt{z}$. On peut toutefois vérifier que l'intégrale $\big[\mathscr{F}\big(\frac{1}{\sqrt{t}} H(t)\big)\big](\xi) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-i\,\xi\,t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et définit bien un nombre complexe.

Compte tenu des points qui précèdent, si on se donne une “fonction causale” f (elle vérifie par définition $f(t) = 0$ si $t < 0$), nous proposons ici de définir l'intégrale d'ordre un demi $\mathrm{I}^{1/2} f$ de la fonction f *via* la relation $\mathrm{I}^{1/2} f = K * f$, avec $K(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} H(t)$. En d'autres termes, $\mathrm{I}^{1/2} f$ est une fonction causale telle que pour $t > 0$, $\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Comme le produit de convolution est commutatif, on peut aussi écrire cette dernière expression sous la forme $\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,\theta}} f(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

• Composition de l'intégrale d'ordre un demi avec elle-même

Nous vérifions maintenant que la définition proposée plus haut $\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)(t) = H(t)\,\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ pour une fonction causale f satisfait effectivement à la relation $\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big) = \mathrm{I}^1 f$ quel que soit le choix de la fonction f. Comme $\mathrm{I}^{1/2} f$ est une fonction causale avec notre construction, il suffit de vérifier la relation $\big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](t) = \int_0^t f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t > 0$.

La preuve de cette propriété consiste à écrire le membre de gauche comme une intégrale double : $\big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\theta)}} \big(\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\pi\,(\theta-\xi)}} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\big)\,\mathrm{d}\theta$. À l'aide du théorème de Fubini, on transforme cette dernière expression : $\big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \mathrm{d}\xi\, f(\xi)\, \int_\xi^t \mathrm{d}\theta \frac{1}{\sqrt{t-\theta}}\,\frac{1}{\sqrt{\theta-\xi}}$. Pour le calcul de l'intégrale $\int_\xi^t \mathrm{d}\theta \frac{1}{\sqrt{t-\theta}}\,\frac{1}{\sqrt{\theta-\xi}}$, on fait d'abord le changement de variable $\theta = \xi + x\,(t-\xi)$ et on obtient $\int_\xi^t \mathrm{d}\theta \frac{1}{\sqrt{t-\theta}}\,\frac{1}{\sqrt{\theta-\xi}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\,(1-x)}}$. On pose ensuite $x = \sin^2\varphi$ avec $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ qui montre que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\,(1-x)}} = \pi$. On en déduit alors $\big[\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2} f\big)\big](t) = \int_0^t \mathrm{d}\xi\, f(\xi)$ et la propriété est démontrée. $\square$

- Premier exemples

On obtient sans difficulté les relations suivantes : $\big(\mathrm{I}^{1/2}H\big)(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,H(t)$, $\big(\mathrm{I}^{1/2}\sqrt{t}\,H(t)\big)(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,t\,H(t)$ et $\big(\mathrm{I}^{1/2}\,\frac{H(t)}{\sqrt{t}}\big)(t) = \sqrt{\pi}\,H(t)$. On constate que pour une fonction puissance du type t^{α}, l'intégrale d'ordre un demi correspondante a encore la forme d'une fonction puissance $t^{\alpha+1/2}$ et l'exposant a été augmenté de un demi. Enfin, on vérifie aisément pour les fonctions $f(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{t}}$ et $f(t) = H(t)$ la relation constitutive $\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2}f\big) = \mathrm{I}^{1}f$.

Exercices

- Une valeur particulière de la fonction gamma

a) Rappeler pourquoi l'intégrale $\int_0^{\infty} \exp(-t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ qui définit $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$ est bien convergente.

b) Sachant que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(\frac{x^2}{2}\big)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$, calculer $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$.

- Fonction bêta d'Euler

On rappelle que pour $s > 0$, on a $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}\exp(-t)\,\mathrm{d}t$. Pour $x > 1$ et $y > 1$, on introduit la fonction "bêta" avec la relation $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$. On suppose $x > 1$ et $y > 1$ dans tout l'exercice.

a) Montrer que la fonction bêta est bien définie ; en d'autres termes, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ définit bien un nombre réel.

b) En écrivant le produit $\Gamma(x)\,\Gamma(y)$ comme une intégrale double, montrer à l'aide d'un changement de variables bien choisi, que l'on a $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

c) En déduire la relation $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y}\,B(x,y)$.

- Intégrale d'ordre un demi des fonctions puissance

On note H la fonction de Heaviside. Pour $\alpha > -1$, on pose $p_\alpha(t) = t^{\alpha}\,H(t)$.

a) Montrer que $\big(\mathrm{I}^{1/2}p_\alpha\big)(t) = \frac{H(t)\,t^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{\alpha}}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$.

b) En déduire la relation $\big(\mathrm{I}^{1/2}p_\alpha\big)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,p_{\alpha+\frac{1}{2}}\,B\big(\frac{1}{2}, \alpha+1\big)$.

c) À l'aide des résultats de l'exercice précédent, établir que $\big(\mathrm{I}^{1/2}p_\alpha\big)(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\big(\alpha+\frac{3}{2}\big)}\,p_{\alpha+\frac{1}{2}}$.

d) Vérifier que ce résultat est cohérent avec ce qui a été établi en cours.

e) Vérifier que pour tout $\alpha > -1$ et pour tout $t > 0$, on a bien $\big(\mathrm{I}^{1/2}\big(\mathrm{I}^{1/2}p_\alpha\big)\big)(t) = \int_0^t \theta^{\alpha}\,\mathrm{d}\theta$.