le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 12 Espaces de Hilbert et transformation de Fourier

- Produit scalaire hermitien

On se donne $T > 0$ et une fonction f à valeurs complexes et de carré intégrable sur l'intervalle $]0, T[$: $f \in \mathrm{L}^2(]0, T[, \mathbb{C})$, noté plus simplement $\mathrm{L}^2(0, T)$ dans la suite. On introduit le produit scalaire hermitien de deux fonctions de $\mathrm{L}^2(0, T)$: $(f, g) = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Ce produit scalaire hermitien est linéaire par rapport au premier facteur et antilinéaire par rapport au deuxième. On a en particulier $(f, \lambda\, g) = \overline{\lambda}\,(f, g)$ et $(\lambda\, f, \lambda\, f) = |\lambda|^2\,(f, f)$. De plus, $(g, f) = \overline{(f, g)}$ et en conséquence, $(f, f) \geq 0$.
La norme associée $\| f \|_2$ est définie par $\| f \|_2 = \sqrt{(f, f)}$. Si elle est nulle, alors la fonction f est nulle presque partout.

- Exponentielles complexes

On introduit une notation spécifique pour les fonctions exponentielles complexes de période multiple de $T > 0$: pour $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $e_k(t) = \exp(2\,k\,i\,\pi\,\frac{t}{T})$. On peut voir cette fonction comme une fonction périodique de période T ou bien comme une fonction de $\mathrm{L}^2(0, T)$. Les fonctions $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont de plus orthogonales : $(e_k, e_\ell) = T\,\delta_{k\ell}$.

- Polynômes trigonométriques

On se donne toujours $T > 0$ et on considère un entier $N \geq 0$. On introduit l'espace vectoriel P_N engendré par les exponentielles complexes e_k pour $-N \leq k \leq N$:
$P_N = < e_{_N}, e_{_{-N+1}}, \ldots, e_{_{-1}}, e_{_0}, e_1, \ldots, e_{_{N-1}}, e_{_N} >$. L'espace P_N est un espace vectoriel sur le corps des complexes de dimension $2N+1$.

- Une projection orthogonale

On se donne $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et $N \in \mathbb{N}$. Nous cherchons une fonction $g_N \in P_N$ qui soit le plus proche possible de f, c'est à dire telle que $\| f - g_N \|_2 \leq \| f - \varphi \|_2$ pour toute fonction $\varphi \in P_N$.
On se donne $\psi \in P_N$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On choisit d'abord $\varphi = g_N - \theta\,\psi$. Après quelques lignes de calcul, on a $\| f - \varphi \|_2^2 = \| f - g_N \|_2^2 + 2\,\theta\,\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \| \psi \|_2^2$. On déduit de la propriété de minimum que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2\,\theta\,\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \| \psi \|_2^2 \geq 0$ et $\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) = 0$ pour toute fonction $\psi \in P_N$. De façon analogue avec $\varphi = g_N - i\,\theta\,\psi$. Toutes choses égales par ailleurs, la propriété de minimum entraîne $2\,\theta\,\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) + \theta^2 \| \psi \|_2^2 \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et on en déduit $\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) = 0$.
Des relations $\mathrm{Re}(f - g_N, \psi) = 0$ et $\mathrm{Im}(f - g_N, \psi) = 0$ pour toute fonction $\psi \in P_N$, il vient $\forall\, \psi \in P_N$, $(f - g_N, \psi) = 0$. On développe maintenant $g_N = \sum_{|k| \leq N} \alpha_k\, e_k$ dans la base des exponentielles complexes $e_k \in P_N$ et on prend $\psi = e_j$ pour $|j| \leq N$. Compte tenu de l'orthogonalité des exponentielles complexes, le produit scalaire (g_N, e_j) ne comporte qu'un seul terme : $(g_N, e_j) = T\,\alpha_j$. On déduit de la relation $(f - g_N, e_j) = 0$ une expression du coefficient α_j :

$\alpha_j = \frac{1}{T}(f, e_j) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,j\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$. La fonction $g_N \in P_N$ solution du problème de distance minimale $\|\, f - g_N \,\|_2 \leq \|\, f - \varphi \,\|_2$ s'écrit nécessairement sous la forme
$g_N = \sum_{k=-N}^{k=N} \widehat{f}_k\, e_k$. Le nombre $\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,k\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$ s'appelle le k^{o} coefficient de Fourier de la fonction f, suite aux travaux de Joseph Fourier (1768–1830) résumés dans son livre *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822.

- Solution du problème de minimisation

La fonction $g_N \in P_N$ définie par les relations $\widehat{f}_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-2\,i\,k\,\pi\frac{t}{T})\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $g_N = \sum_{k=-N}^{k=N} \widehat{f}_k\, e_k$ est effectivement la solution unique du problème de distance minimale, ou de projection orthogonale de la fonction f sur le sous-espace P_N de dimension finie. On a
$\|\, f - g_N \,\|_2 \leq \|\, f - \varphi \,\|_2$ pour toute fonction $\varphi \in P_N$.
Une remarque importante est que, compte tenu de l'orthogonalité dans $\mathrm{L}^2(0, T)$ des exponentielles complexes, les coefficients de Fourier $\widehat{f}_k$ ne dépendent pas de la dimension N.

- Inégalité de Bessel

On se donne $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et $N \in \mathbb{N}$. On a l'inégalité $\sum_{|k|\leq N} |\widehat{f}_k|^2 \;\leq\; \frac{1}{T}\int_0^T \,|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$. La preuve consiste à écrire le théorème de Pythagore : $\|\, f - \varphi \,\|_2^2 = \|\, f - g_N \,\|_2^2 + \|\, g_N - \varphi \,\|_2^2$, valable pour la solution $g_N \in P_N$ du problème de minimisation et pour toute fonction $\varphi \in P_N$. le cas particulier $\varphi = 0$ conduit à $\|\, g_N \,\|_2^2 \leq \|\, f \,\|_2^2$ qui exprime l'inégalité de Bessel.

- Convergence de la série de Fourier

Le terme général de la série de Fourier est par définition la fonction g_n, définie plus haut pour tout entier $n \geq 0$ avec la relation $g_n = \sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}_k\, e_k$. L'inégalité de Bessel montre que cette suite est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$. Comme l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$ est complet pour la norme $\|\;\|_2$, la suite g_n converge vers une fonction $g \in \mathrm{L}^2(0, T)$.
Attention, la convergence dans $\mathrm{L}^2(0, T)$ n'entraîne pas la convergence ponctuelle ! Pour un nombre $t \in \mathbb{R}$ donné, la suite numérique $\sum_{k=-n}^{k=n} \widehat{f}_k\, e_k(t)$ ne converge pas forcément vers $g(t)$. Il faut extraire une sous-suite qui va converger presque partout, c'est à dire pour tout nombre réel t sauf pour un ensemble de mesure nulle.
La question importante maintenant est de savoir si $g = f$: la limite de la série de Fourier est-elle égale à la fonction f initiale ? Il s'agit d'une question très technique qui va demander d'approfondir deux points.

- Densité des polynômes trigonométriques

On pose d'abord $S = \cup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ l'espace de tous les polynômes trigonométriques. On introduit ensuite l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont périodiques et de période T. C'est un espace de Banach pour la norme $\mathrm{L}^\infty(0, T)$. Rappelons que pour
$\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$, on a $\|\gamma\|_\infty = \sup\{|\gamma(t)|,\, 0 \leq t \leq T\}$. On a la double propriété de densité suivante.
D'une part, l'espace S des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues périodiques et de période T. Toute fonction continue γ peut être approchée à une distance arbitraireent petite par un polynôme trigonométrique pour la norme du sup : pour $\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in S$ tel que $\|\, \gamma - p \,\|_\infty < \varepsilon$.
D'autre part, l'espace $\mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ des fonctions continues périodiques est dense dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$. Toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ peut être approchée à une distance arbitraireent

petite par une fonction continue : pour $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{R}/T\,\mathbb{Z})$ tel que $\| f-\gamma\|_2 < \varepsilon$.
On peut alors utiliser ces deux résultats conjointement car T est un nombre positif fixé : l'espace S des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$: pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $p \in S$ tel que $\| f-p\|_2 < \varepsilon$.

- Quatre propriétés équivalentes

On a l'équivalence des quatre propriétés suivantes :
(i) l'espace S des polynômes trigonométriques est total, ce qui signifie que son orthogonal $S^\perp \equiv \{\varphi \in \mathrm{L}^2(0,T), \forall p \in S, (\varphi, p) = 0\}$ est réduit à $\{0\}$.
(ii) l'espace S est dense, propriété qui vient d'être démontrée au paragraphe précédent.
(iii) l'inégalité de Bessel devient une égalité si l'entier n tend vers l'infini :
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$. Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Parseval ; à un facteur multiplicatif près, la norme est conservée dans la transformation de Fourier
$\mathrm{L}^2(0,T) \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.
(iv) la transformation de la fonction $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ en la série de ses coefficients de Fourier $\widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ conserve le produit scalaire à un facteur multiplicatif près :
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_k\,\overline{\widehat{g}_k} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. Cette transformation définit une isométrie entre les espaces de Hilbert $\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$.
La preuve de cette propriété est un cas particulier d'un résultat général valable dans tous les espaces de Hilbert.

- Espaces de Hilbert

Ces espaces, introduits par le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943), permettent de généraliser la notion de série de Fourier et de les replacer dans un cadre mathématique beaucoup plus large. De plus, les espaces de Hilbert permettent de faire de la géométrie euclidienne dans des espaces de fonctions.

- Produit scalaire hermitien

La théorie qui est présentée ici est relative aux corps des complexes. Elle peut se restreindre au cas du corps des nombres réels sans difficulté.
Un espace préhilbertien H sur le coprs des nombres complexes est la donnée d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire hermitien, c'est à dire d'une fonction de deux arguments $H \times H \ni (x,y) \longmapsto (x,y) \in \mathbb{C}$ qui satisfait aux propriétés suivantes :
- conjugaison par échange des arguments : $(y,x) = \overline{(x,y)}$,
- linéarité par rapport au premier argument : $(x_1+x_2, y) = (x_1,y)+(x_2,y)$ et $(\lambda\,x, y) = \lambda\,(x,y)$ pour tout x, x_1, x_2, y dans H et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- antilinéarité par rapport au second argument : $(x, y_1+y_2) = (x,y_1)+(x,y_2)$ et $(x, \lambda\,y) = \overline{\lambda}\,(x,y)$ pour tout x, y, y_1, y_2 dans H et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- positivité du carré scalaire : $(x,x) \geq 0$,
- existence de la norme : $\| x\| \equiv \sqrt{(x,x)}$,
- caractère défini de la norme : si $\| x\| = 0$, alors $x = 0$.

Alors on dispose de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$ pour tout x, y dans H. L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout x, y dans H. De plus, si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité, les deux vecteurs x et y sont colinéaires.

- Définition d'un espace de Hilbert

Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien tel que, muni de la norme associée $\| \ \|$, l'espace vectoriel normé $(H, \| \ \|)$ est un espace complet.

- Projection sur un sous-espace vectoriel fermé

On se donne un sous-espace vectoriel M de l'espace de Hilbert H. On note $M^\perp$ l'orthogonal du sous-espace M. On suppose que M est fermé pour la topologie induite par la norme sur H. Alors il existe deux projecteurs $P\colon\, H \longrightarrow M$ et $Q\colon\, H \longrightarrow M^\perp$ de sorte que $x = Px + Qx$ pour tout $x \in H$, $\|x - Px\| = \inf\{\|x-y\|,\ y \in M\}$ et $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$ pour tout $x \in H$.
Comme tout sous-espace de dimension finie de H est fermé, ce théorème permet de s'assurer que pour tout entier $n \geq 0$, la projection $\mathrm{L}^2(0,T) \ni f \longmapsto g_n \in P_n$ étudiée plus haut définit effectivement un projecteur de distance minimale.

- Théorème de représentation de Riesz

On désigne par H' l'espace des formes linéaires continues sur l'espace de Hilbert H. Si $\varphi \in H'$, alors pour tout $x \in H$, $<\varphi, x>$ désigne le nombre complexe image par φ du vecteur x. Dire que la forme linéaire φ est continue exprime qu'il existe une constante $C \geq 0$ de sorte que pour tout $x \in H$, $|<\varphi, x>| \leq C\,\|x\|$. Le théorème de représentation de Riesz énonce que $\varphi \in H'$ peut être représentée de façon unique par un vecteur $u \in H$: $<\varphi, x> = (x, u)$ pour tout $x \in H$.
Le théorème de Riesz a déjà été évoqué quand nous nous sommes intéressé aux formes linéaires continues sur $\mathrm{L}^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

- Familles orthonormées

Une famille orthonormée $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est formée de vecteurs unitaires de l'espace de Hilbert H deux à deux orthogonaux : $(u_k, u_\ell) = \delta_{k\ell}$. Pour $x \in H$, on introduit ses coefficients de Fourier $\widehat{x}_k$ relativement à la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec la relation $\widehat{x}_k = (x, u_k)$.
Les quatre conditions suivantes sont équivalentes

(i) la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est totale : $((\varphi, u_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (\varphi = 0)$. Si φ est orthogonal à tous les u_k, alors φ est nul,

(ii) l'espace S des combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans H : $\forall \varphi \in H$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in \mathbb{C}$, $\|\varphi - \sum_{k=0}^N x_k u_k\| < \varepsilon$,

(iii) la somme des carrés des modules des coefficients de Fourier $\widehat{x}_k \equiv (x, u_k)$ est égale au carré de la norme $\|x\|^2$: $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\widehat{x}_k|^2 = \|x\|^2$,

(iv) pour tout x, $y \in H$, on a l'identité de Bessel-Parseval $\sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{x}_k \, \overline{\widehat{y}_k} = (x, y)$.

- Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables

On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\, t)\, f(t) \, \mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f. On la note aussi $\mathscr{F} f$ et on a $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

- Exemples fondamentaux

On se donne $a>0$. L'exponentielle causale φ_a est définie par $\varphi_a(t)=H(t)\exp(-at)$. C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $\varphi_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\widehat{\varphi}_a(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}$.
Pour $a>0$, l'exponentielle causale symétrisée ψ_a s'écrit : $\psi_a(t)=\exp(-|a|t)$. C'est une fonction paire qui est identique à φ_a si $t\geq 0$. On a $\widehat{\psi}_a(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathscr{F}(\exp(-a|t|)))(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$.
Pour $T>0$, la porte P_T de largeur T satisfait aux contraintes suivantes : $P_T(t)=1$ si $|t|\leq T/2$ et $P_T(t)=0$ lorsque $t<-T/2$ ou $t>-T/2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien entendu finie [$P_T\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$] et on a $\widehat{P_T}(\omega)=\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Sinus cardinal

Pour $\theta\in\mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\operatorname{sinc}\theta=\frac{\sin\theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta=0$: $\operatorname{sinc}0=0$. Alors $\widehat{P_T}(\omega)=T\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Transformée de Fourier de la gaussienne

Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$. C'est la gaussienne centrée réduite. Elle satisfait aux relations [exercice !] $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t=1$, $\int_{\mathbb{R}} t\,g(t)\,\mathrm{d}t=0$, $\int_{\mathbb{R}} t^2\,g(t)\,\mathrm{d}t=1$, $\int_{\mathbb{R}} t^3\,g(t)\,\mathrm{d}t=0$, $\int_{\mathbb{R}} t^4\,g(t)\,\mathrm{d}t=3$, *etc.* Sa transformée de Fourier a une expression classique, et c'est aussi une gaussienne : $\widehat{g}(\xi)=\sqrt{2\pi}\,g(\xi)=\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$.

- Parité

On remarque que si f est paire, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}f$ est paire également [exercice].

- Linéarité

Si les fonctions f et g sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a
$\mathscr{F}(f+g)=\mathscr{F}f+\mathscr{F}g$. Si λ est un nombre complexe arbitraire et $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a
$\mathscr{F}(\lambda f)=\lambda\,\mathscr{F}f$.

- Transformée de Fourier d'un retard et retard de la transformée de Fourier

On se donne $a\in\mathbb{R}$. Alors $(\mathscr{F}(f(t-a)))(\omega)=\exp(-ia\omega)\,(\mathscr{F}f)(\omega)$. De façon analogue, si ω_0 est un réel arbitraire, $(\mathscr{F}f)(\omega-\omega_0)=(\mathscr{F}(\exp(i\omega_0 t)\,f(t)))(\omega)$.

- Changement d'échelle

On se donne $a>0$. Alors $(\mathscr{F}(f(at)))(\omega)=\frac{1}{a}\,(\mathscr{F}f)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée

Pour tout $\omega\in\mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)|\leq\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue

Si $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R}\ni\omega\longmapsto\widehat{f}(\omega)\in\mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument ω. On a dans ce cas $\widehat{f}\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$. On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.
La preuve est une utilisation du théorème de convergence dominée : la fonction
$\omega\longmapsto f(t)\exp(-i\omega t)$ est continue pour presque toute valeur de $t\in\mathbb{R}$. De plus, elle est dominée par la fonction intégrable $|f|$: $|f(t)\exp(-i\omega t)|\leq|f(t)|$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Donc la fonction intégrée en temps $\omega\longmapsto\int_{\mathbb{R}}f(t)\exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue.

• Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction f dérivable de sorte que f et sa dérivée f' appartiennent toutes deux à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty}(|f(t)|+|f'(t)|)\,\mathrm{d}t<\infty$. Alors la fonction f tend vers zéro à l'infini : $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$ et $\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$.

• Transformée de Fourier de la dérivée

Si la fonction f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $(\mathscr{F}(f'))(\omega)=i\,\omega\,(\mathscr{F}f)(\omega)$.
La preuve se fait par intégration par parties. Comme les fonctions f et f' sont dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la fonction f tend vers zéro et le terme tout intégré est nul. Le résultat proposé s'en déduit alors.

• Dérivée de la transformée de Fourier

On suppose que les fonctions f et $\mathbb{R}\ni t\longmapsto t\,f(t)\in\mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la transformée de Fourier
$\mathbb{R}\ni\omega\longmapsto\widehat{f}(\omega)\in\mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega}=-i\,(\mathscr{F}(t\,f(t)))(\omega)$.
La preuve de ce résultat est une utilisation du théorème de convergence dominée. La dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial\omega}\big(f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\big)$ est majorée en module par $|t|\,|f(t)|$. Cette fonction est intégrable et ne dépend pas de la variable ω par rapport à laquelle on dérive. Donc le calcul formel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\big(\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t\big)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\omega}\big(f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\big)\,\mathrm{d}t$ est valable, ce qui justifie la relation proposée.

• Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit de convolution $f*g$ défini par la relation $(f*g)(t)=\int_{\mathbb{R}}f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$ appartient également à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathscr{F}(f*g)=(\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.
La preuve de ce résultat demande d'abord de vérifier que le produit de convolution de deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ appartient encore à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Une fois cette propriété établie à l'aide du théorème de Tonnelli, on forme la transformée de Fourier $\widehat{f*g}$ du produit de convolution $f*g$ des fonctions f et g avec une intégrale double : $\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,\big(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}y\,f(y)\,g(x-y)\big)\,\exp(-i\,\xi\,x)$. Le théorème de Fubini permet alors déchanger l'ordre d'intégration :
$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}y\,f(y)\,\big(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}x\,g(x-y)\,\exp(-i\,\xi\,x)\big)$ et la fin du calcul est alors un exercice laissé au lecteur.

• Une propriété de l'opérateur de translation

On se donne une fonction $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}|f(t-\tau)-f(t)|\,\mathrm{d}t$ tend vers zéro si le nombre τ tend vers zéro.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini

Si $f\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque ω tend vers $+\infty$ ou ω tend vers $-\infty$.
Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits plus haut, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t)=H(t)\,\exp(-a\,t)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t)=\exp(-a\,|t|)$ et la porte P_T égale à 1 si $|t|\leq\frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a>0$ et $T>0$]. On

a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)$; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.
La preuve est délicate et repose sur une propriété très fine de l'opérateur de translation énoncée ci-dessus. Puisque $\exp(-i\pi) = -1$, on écrit la définition de la transformée de Fourier sous la forme $\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(-i\pi)\exp(-i\xi t)\,\mathrm{d}t$ et on a le calcul suivant :
$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\exp\big(-i\xi\,(t+\frac{\pi}{\xi})\big)\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f\big(\theta - \frac{\pi}{\xi}\big)\exp(-i\xi\,\theta)\,\mathrm{d}t$. Donc
$2\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \big[f(t) - f\big(t-\frac{\pi}{\xi}\big)\big]\exp(-i\xi t)\,\mathrm{d}t$ et $|\widehat{f}(\xi)| \le \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f\big(t-\frac{\pi}{\xi}\big)|\,\mathrm{d}t$. Si ξ tend vers l'infini, l'expression $\frac{\pi}{\xi}$ tend vers zéro et la dernière intégrale tend vers zéro compte tenu du résultat rappelé plus haut sur l'opérateur de translation.

- Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ par l'expression
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. Seul le signe de ω dans l'exponentielle complexe a changé. On a la relation $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction f est intégrable ($f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable ($\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega t)\,\widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel t dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}\widehat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$.
Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\widehat{\varphi}_a$ et $\widehat{P}_T$ n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\widehat{\psi}_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier
$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega t)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{\pi}{a}\exp(-a|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale d'une fonction [ici $\exp(i\,\omega t)/(a^2+\omega^2)$] dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.
Dans le cas de la gaussienne, l'égalité $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\xi)\exp(i\xi t)\,\mathrm{d}\xi$ se vérifie avec un simple calcul d'intégrales.
L'égalité ponctuelle presque partout $f(t) = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$ peut s'écrire aussi
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\big((\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})f\big)(t)$ pour tout réel t, c'est à dire $\big((\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})f\big)(t) = 2\pi f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})f = 2\pi f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions intégrables telles que leur transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})f = 2\pi f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F}$ transforme la fonction f en elle même, à un facteur 2π près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathscr{E} \ni f \longmapsto \mathrm{id} f = f \in \mathscr{E}$, la relation $(\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})f = 2\pi\,\mathrm{id} f$ valable pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace $\mathscr{E}$: $\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Quand on compose les opérateurs $\mathscr{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, on trouve l'identité : $\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big)_\circ\mathscr{F} = \mathrm{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi

$\mathscr{F}_\circ\big(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\big) = \mathrm{id}$. En d'autres termes, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

• Approximation des fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais si on la tronque en posant pour k entier positif, $f_k = P_{2k}\, f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Cette suite f_k converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si k tend vers l'infini.

• Transformée de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Comme la suite f_k appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f_k}$ est bien définie *via* la relation $\widehat{f_k}(\omega) = \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut montrer que cette suite $\widehat{f_k}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F} f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$,
$(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$.
On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

• Théorème de Plancherel

L'application $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ définit un isomorphisme de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On a conservation, à 2π près, du produit scalaire hilbertien : $(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi\,(f, g)$, identité dite de Bessel-Parseval : $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. En prenant $g = f$, on a la conservation de la norme à un facteur 2π près : $\|\mathscr{F} f\|^2 = 2\pi\,\|f\|^2$, identité qui exprime que
$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

• Opérateur de Fourier conjugué dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. On a également, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$,
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

• Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$: $\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}_\circ\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la forme $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.
On en déduit que pour toute fonction f de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}_\circ\overline{\mathscr{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel t, on a les égalités
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)\big)(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)\big)(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions f et $\mathscr{F} f$ sont intégrables.

• Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)(t) = \frac{2\pi}{T} P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !

Exercices

- Dent de scie

On se donne un réel positif T. Soit u la fonction périodique de période T définie sur l'intervalle $]0, T[$ par la relation $u(t) = \frac{t}{T}$.

a) Montrer qu'on peut développer u en série de Fourier faisant intervenir essentiellement la fonction sinus.

b) Que peut-on dire de la convergence ponctuelle de la série de Fourier ainsi obtenue ?

c) En utilisant l'égalité de Parseval, établir la somme classique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Transformée de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul.

a) Montrer qu'on a la relation suivante

$\int_0^1 \theta \exp(i\beta\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{\beta^2}(\cos\beta - 1) + \frac{1}{\beta}\sin\beta\right] + i\left[\frac{1}{\beta^2}\sin\beta - \frac{1}{\beta}\cos\beta\right]$.

On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la "corde pincée" comme la fonction c périodique de période 1, continue sur $\mathbb{R}$, affine sur les intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$.

b) Vérifier que $c(\theta) = \min\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1-\theta}{1-\alpha}\right)$.

c) En déduire de la relation (1) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation

$c(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)\pi^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}\left[\left(\cos(2k\pi\alpha) - 1\right)\cos(2k\pi\theta) + \sin(2k\pi\alpha)\sin(2k\pi\theta)\right]$.

- Equation de la chaleur sur un intervalle

On se donne $\kappa > 0$. On cherche à résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$. On se donne d'abord des conditions aux limites périodiques : $u(0, t) = u(L, t)$ pour tout instant $t \geq 0$. On se donne aussi une condition initiale de la forme $u(x, 0) = u_0(x)$ pour tout $x \in [0, L]$, où u_0 est une fonction donnée qui satisfait aux conditions limites : $u_0(0) = u_0(L)$.

a) Chercher une solution de l'équation de la chaleur $u(x, t)$ sous la forme d'une série de Fourier relative à la variable x avec des coefficients réels qui dépendent du temps. On pourra prendre la fonction u périodique de de période L.

b) Montrer que les coefficients de Fourier sont alors solutions d'équations différentielles très simples qu'on intègrera sans difficulté.

c) Montrer que les conditions initiales sont reliées naturellement aux coefficients de Fourier correspondants de la condition initiale u_0.

On change les conditions aux limites ; on remplace les conditions aux limites périodiques par des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur les bords de l'intervalle : pour tout $t > 0$, $u(0, t) = 0$ et $u(L, t) = 0$. La condition initiale u_0 est maintenant une fonction donnée qui satisfait aux nouvelles conditions aux limites : $u_0(0) = 0$ et $u_0(L) = 0$.

d) Reprendre les questions a), b), c) avec ces nouvelles conditions aux limites. On cherchera la fonction inconnue u sous la forme d'une série de Fourier relative à x avec des coefficients qui dépendent du temps. On pourra étendre la fonction u *a priori* définie sur l'intervalle $[0, L]$ en une fonction impaire et chercher u périodique de période $2L$.

• Quelle bonne formule pour “la” série de Fourier ?

Si on se donne une fonction f continue sur l'intervalle $]0,T[$ et telle que $f(0) = f(T) = 0$ pour fixer les idées, on peut construire plusieurs développements de cette fonction en séries de Fourier.

a) Expliquer pourquoi on peut construire certains développements avec uniquement la fonction “cosinus”.

b) Même question avec des développements avec uniquement la fonction “sinus”.

c) Proposer des développements de Fourier de cette forme pour un exemple à définir.

• Convolution de la porte et transformation de Fourier

Soit T un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” définie par $P_T(t) = 1$ pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon.

a) Montrer que le produit de convolution $P_T * P_T$ est une fonction φ_T définie par $\varphi_T(t) = t + T$ pour $-T \leq t \leq 0$, $\varphi_T(t) = T - t$ pour $0 \leq t \leq T$ et $\varphi_T(t) = 0$ sinon.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ_T.

c) En déduire, à l'aide du théorème d'inversion de Fourier, que $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \pi$.

d) Étendre le résultat de la question précédente et calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf en quelques valeurs particulières qu'on précisera, une expression analytique de la fonction $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 \exp(i\,\omega t)\,\mathrm{d}\omega$.

• Transformation de Fourier de la gaussienne

On admet que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

En déduire la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ de la gaussienne $f(t) \equiv \exp(-t^2/2)$.

• Transformation de Fourier du sinus cardinal

Pour t réel, on définit le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$ par la relation $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$.

A l'aide de la transformée de Fourier conjuguée d'une porte bien choisie et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

• Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy

Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $\exp(-a\,|t|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.

b) En déduire la transformée de Fourier des fonctions $g(t) = \frac{1}{10+6t+t^2}$, $h(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ et $k(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

• Quelques intégrales

a) A partir des résultats de l'exercice précédent, expliciter la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, c'est à dire de la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

c) Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\,\mathrm{d}t$.

d) Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale $I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$.

- Transformation de Fourier [février 2014]

On se donne un réel a strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-a\,|t|)$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} f)(\omega)$?

b) Démontrer que la fonction $(\mathscr{F} f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ est bien définie.

e) A l'aide de quel opérateur la fonction Φ est-elle reliée à la fonction g ?

f) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t.

- Transformation de Fourier [février 2018]

On se donne $T > 0$ et on définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par les relations $f(t) = 1$ si $0 < t < T$, $f(t) = -1$ si $-T < t < 0$ et $f(t) = 0$ si $|t| > T$.

a) Montrer que la fonction f appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

b) En déduire l'expression $\widehat{f}(\xi)$ de sa transformée de Fourier pour tout nombre réel ξ.

c) La fonction f appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

d) En déduire une expression analytique de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 \xi}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$.