le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 2 Fontions numériques d'une variable rélle

- Premiers pas dans la construction de l'intégrale

Pour toute cette partie, on se donne deux nombres réels a et b de sorte que $a < b$. On note $I = [a, b]$ l'intervalle correspondant. Nous allons proposer toute une série d'axiomes qui permettent de donner un sens à l'intégrale d'une fonction de variable réelle sur un intervalle borné. On se donne une application f bornée et positive de l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. De façon intuitive, l'intégrale $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$, qu'on note aussi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas d'une dimension d'espace, représente l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe d'une part, entre les abscisses a et b d'autre part.
Ainsi, si la fonction f est une constante égale à 1, l'intégrale se réduit à la surface d'un rectangle et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$.
Si la fonction f est une fonction affine, l'aire sous la courbe est un parallélogramme droit. La relation classique de la surface d'un parallélogramme (petite base plus grande base, multipliée par la hauteur et divisée par deux) s'écrit dans ce cas $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\,(b-a)$.

- L'intégrale d'une fonction positive est positive.

Si la fonction f est positive (c'est à dire $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$), le nombre $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ est positif.

- Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Soit f une fonction bornée de I dans $\mathbb{R}$. On décompose f comme différence entre sa partie positive f^+ et de sa partie négative f^- : $f \equiv f^+ - f^-$, avec $f^+(x) \equiv \sup(0, f(x)$ et $f^-(x) \equiv \sup(0, -f(x)$. On remarque qu'on a avec ces notations $|f| \equiv f^+ + f^-$. Si $\int_I f^+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_I f^-(x)\,\mathrm{d}x$ sont définies, on pose $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f^-(x)\,\mathrm{d}x$. On a alors une inégalité très importante : $|\int_I f(x)\,\mathrm{d}x| \leq \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

- L'intégrale est une forme linéaire

On se donne deux fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ et un nombre réel λ. Alors
$\int_I \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_I \big(\lambda\, f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Monotonie de l'intégrable

De la positivité de l'intégrale et de sa linéarité, on déduit la propriété suivante : si $f \leq g$ sur l'intervalle I (c'est à dire $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$), alors $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$.

- Additivité par rapport au domaine (relation de Chasles)

Si on coupe l'intervalle d'intégration de la fonction en deux morceaux, l'intégrale de la fonction est la somme des intégrales sur chacun des morceaux. Si on a $a < c < b$, alors
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

François Dubois, septembre 2021.

• Intégrale d'une fonction en escalier

A l'aide de l'intégrale d'une constante, de la linéarité et de la propriété d'additivité par rapport au domaine, le calcul de l'intégrale d'une fonction en escalier n'offre pas de difficulté. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est en escaler s'il existe une subdivision de l'intervalle I composée de N intervalles $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ de sorte que f est constante et égale à $\xi_{j+1/2}$ dans l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. Alors $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{j+1/2}\,(x_{j+1} - x_j)$.

• Fonction intégrable au sens de Riemann

Dans le cas général d'une fonction bornée f sur l'intervalle I, on utilise l'intégrale d'une fonction en escalier pour définir le nombre $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ en toute généralité.

On introduit l'ensemble $\mathscr{E}_-(f)$ (respectivement $\mathscr{E}_+(f)$) des fonctions en escalier qui minorent (respectivement majorent) la fonction f sur l'intervalle I. Si $\varphi_- \in \mathscr{E}_-(f)$ et $\varphi_+ \in \mathscr{E}_+(f)$, on a $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$. De plus, on sait parfaitement calculer les nombres $\int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x$. Compte tenu de la monotonie de l'intégrale, on cherche à définir le nombre $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ de sorte que $\int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x$.

Or pour toute fonction $\varphi_- \in \mathscr{E}_-(f)$ et toute fonction $\varphi_+ \in \mathscr{E}_+(f)$, on a $\int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x$. L'ensemble $\{\int_I \varphi_-(x)\,\mathrm{d}x,\, \varphi_- \in \mathscr{E}_-(f)\}$ des intégrales des fonctions en escaliers minorantes est donc non vide et majoré. Il admet une borne supérieure notée ${}_*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. De même, l'ensemble $\{\int_I \varphi_+(x)\,\mathrm{d}x,\, \varphi_+ \in \mathscr{E}_-(f)\}$ des intégrales des fonctions en escaliers majorantes est non vide et minoré. Il admet une borne inférieure notée ${}^*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. On a [exercice !] ${}_*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x \leq {}^*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. Si ces deux nombres sont égaux, on dit que la fonction (bornée) f est intégrable au sens de Riemann et on pose $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = {}_*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = {}^*\!\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

• Fonction continue

On se donne une fonction f définie en tout point x de l'intervalle $I = [a, b]$. Elle est continue en $x_0 \in I$ si les valeurs prises par la fonction "au voisinage" de x_0 "diffèrent peu" de $f(x_0)$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si la fonction f est continue en tout point x_0 de l'intervalle $[a, b]$, on dit qu'elle est continue sur $[a, b]$ est on note $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$.

• Intégrale d'une fonction continue

Si la fonction f est continue sur l'intervalle sur $[a, b]$, alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ est bien définie au sens de Riemann.

Cette propriété montre qu'une classe très large de fontions est intégrable au sens de Riemann. Attention, de nombreuses fonctions discontinues sont également intégrables au sens de Riemann, en particulier les fonctions en escalier ! Mais il existe aussi des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann.

• Fonction caractéristique des rationnels.

On pose $q(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $x \in \mathbb{Q}$ et $q(x) = 0$ si $0 \leq x \leq 1$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Alors [exercice !] ${}_*\!\int_I q(x)\,\mathrm{d}x = 0\ < 1 = {}^*\!\int_I q(x)\,\mathrm{d}x$. L'intégrale de la caractéristique des nombre rationnels n'est pas définie au sens de Riemann.

- Une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ atteint ses bornes.

On note $a<b$ sont deux nombres réels. On se donne une fonction f continue sur l'intervalle $[a,b]$: $f\in\mathscr{C}^0([a,b])$. Alors l'ensemble $f([a,b])$ est borné. De plus, la fonction atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure : $\exists x_-\in[a,b],\ \forall x\in[a,b],\ f(x_-)\leq f(x)$ et $\exists x_+\in[a,b],\ \forall x\in[a,b],\ f(x)\leq f(x_+)$.
Cette propriété est une conséquence de la propriété de compacité de l'intervalle $[a,b]$. Nous y reviendrons dans le cadre de ce cours.

- Théorème des valeurs intermédiaires (premier énoncé)

On se donne deux réels a et b tels que $a<b$ et une fonction f continue de l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires : $f(a)\,f(b)<0$. Alors il existe un nombre réel $\xi\in]a,b[$ de sorte que $f(\xi)=0$.

- Théorème des valeurs intermédiaires (deuxième énoncé)

L'image d'un intervalle non vide I par une fonction continue f de I dans $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne $a<b$ deux points de l'intervalle I et $\alpha\in f([a,b])\equiv\{f(x),\,a\leq x\leq b\}$, image par f de l'intervalle fermé $[a,b]$. Alors il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\alpha$. Une fonction continue atteint toutes les valeurs de l'ensemble image d'un intervalle.

- Connexité

Ce résultat se généralise de la façon suivante. Les intervalles s'identifient aux parties connexes de $\mathbb{R}$, c'est à dire “d'un seul tenant”. Une propriété générale (qui ne sera pas développée dans le cadre de ce cours) énonce que l'image d'un connexe par une fonction continue est un connexe. Comme les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, l'image d'un intervalle par une application continue est toujours un intervalle.

- Continuité uniforme

On se donne un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I si et seulement si pour toute barre d'erreur ε, il existe une incertitude $\eta>0$ de sorte que pour tout x et y dans l'intervalle I, on est sûr que $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ dès que $|y-x|<\eta$. Avec les quantificateurs logiques :
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x,y\in I,\ |y-x|<\eta\implies|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.
Toute fontion uniformément continue sur I est continue en tout point de l'intervalle I.

- Continuité uniforme d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné

On se donne $a<b$ deux nombres réels et $f\in\mathscr{C}^0([a,b])$. Alors la fonction f est uniformément continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$.
On a la propriété $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x,y\in[a,b],\ |y-x|<\eta\implies|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ dès que l'on a $\forall\varepsilon>0,\ \forall x\in[a,b],\ \exists\eta>0,\ \forall y\in[a,b],\ |y-x|<\eta\implies|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Le nombre η dépend *a priori* de x pour la continuité “simple” et n'en dépend pas pour la continuité uniforme : la valeur de $\eta>0$ est “uniforme” relativement au point x de l'intervalle $[a,b]$.
Ce résultat est une conséquence de la propriété topologique de compacité de l'intervalle $[a,b]$. Nous y reviendrons.
Cette propriété d'uniforme continuité des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ permet de les approcher uniformément par des fonctions en escaliers et *in fine* de montrer qu'elles sont

intégrables au sens de Riemann [voir plus haut dans ce résumé de cours].

- Fonction dérivable en un point

On se donne $a < b$ deux nombres réels, f une application de $[a, b]$ a valeurs réelles et $x_0 \in [a, b]$. On dit que f est dérivable en x_0 si le quotient aux différences $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite réelle lorsque x tend vers x_0. Avec des quantificateurs logiques :
$\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a, b], |x-x_0| < \eta \Longrightarrow |\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \ell| < \varepsilon$. Le nombre dérivé ℓ est noté $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
Nous ne parlons pas ici de l'interprétation géométrique de la dérivée comme pente de la droite tangente au graphe ; ceci est supposé déjà connu du lecteur.

- La dérivabilité entraîne la continuité

Avec le même cadre que pour le paragraphe précédent, si la fonction est dérivable en x_0, alors elle est continue en ce point.
La propriété réciproque n'est pas vraie : par exemple la fonction "valeur absolue"
$\mathbb{R} \ni x \longmapsto |x| \equiv \max(x, -x) \in [0, \infty[$ est continue en $x_0 = 0$ mais elle n'y est pas dérivable.
De même, la fonction "racine carrée" $[0, \infty[\ni x \longmapsto \sqrt{x} \in [0, \infty[$ est continue en $x_0 = 0$ mais elle n'est pas dérivable en ce point.

- Fonction dérivable en tout point

Si la fonction f est dérivable en tout point x_0 de $[a, b]$, on dit qu'elle est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Si la fonction dérivée $[a, b] \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue, on dit que f est continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et on le note $f \in \mathscr{C}^1([a, b])$.
Toutes les fonctions "élémentaires", c'est à dire les polynômes, les fractions rationnelles, l'exponentielle et ses cousines circulaires sinus et cosinus sont des fonctions indéfiniment dérivables sur leur ensemble de définition. Nous renvoyons le lecteur à ses connaissances antérieures pour le formulaire de dérivation de ces fonctions.

- Lemme de Rolle

On suppose $a < b$ et on se donne une fonction f continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$. On suppose que la fonction a des valeurs identiques aux deux bouts : $f(a) = f(b)$. Alors la fonction dérivée s'annule au moins une fois sur l'intervalle ouvert : $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

- Théorème des accroissements finis

Mêmes hypothèses que pour le lemme de Rolle, sauf qu'on ne suppose plus aucune hypothèse sur les valeurs de la fonction f aux deux bouts. Alors la fonction dérivée est égale à la pente discrète entre les points a et b pour au moins une valeur de l'argument :
$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. La preuve est proposée en exercice.

- Une propriété des intervalles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On suppose que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de I et que de plus $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction f est constante : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
La preuve résulte du théorème des accroissements finis.

Attention, si $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, est de dérivée nulle en tout point et si A n'est pas un intervalle, la conclusion précédente peut être en défaut. Considérer par exemple la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0[$ et $H(x) = 1$ si $x \in]0, +\infty[$. Elle est dérivable sur $A =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et sa dérivée est nulle. Mais elle n'est pas constante !

- Théorème fondamental de l'Analyse

On se donne deux réels $a < b$ et une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ continue sur l'intervalle $[a, b]$. On pose $\psi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ Alors la fonction $\psi(x)$ est dérivable sur $[a, b]$ et $\psi'(x) = f(x)$. On écrit aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\big) = f(x)$.

- Calcul d'intégrales à l'aide de primitives

Dans le cadre proposé pour le théorème foncamental, on considère une "primitive" de la fonction f, c'est à dire une fonction dérivable F telle que $F' = f$. Alors on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \equiv [F]_a^b$, variation de F entre a et b.
La preuve consiste à dériver $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - F(x) + F(a)$ sur l'intervalle $[a, b]$.

- Règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit

Dans le cas où les fonction u et $v\,v$ sont dérivables en x_0, le produit $u\,v$ est dérivable en x_0 et $(uv)'(x_0) = u'(x_0)\,v(x_0) + u(x_0)\,v'(x_0)$. On écrit usuellement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\,v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x) + u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.

- Intégration par parties

On suppose des fonctions u et v continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$. On a la formule très importante en pratique : $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x + [u\,v]_a^b$.
La preuve est une conséquence de la règle de Leibniz et du théorème fondamental de l'Analyse.

- Dérivation des fonctions composées

Si $y = f(x)$ définit une première application dérivable de la variable réelle x et $z = g(y)$ une seconde application dérivable, on peut composer ces deux fonctions : $z = g\big(f(x)\big) \equiv \big(g_\circ f\big)(x)$. Alors la fonction composée $g_\circ f$ est dérivable et $(g_\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)$. On écrit en pratique cette relation sous la forme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
En conséquence, on peut montrer [exercice !] les relations classiques suivantes :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\frac{1}{f}\big)(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f^{-1}\big)(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{Arctg}x\big) = \frac{1}{1+x^2}$, *etc.*

- Classes de fonctions continûment dérivables

Soit m un entier positif ou nul et $a < b$ deux nombres réels. On note $\mathscr{C}^m([a, b])$ l'ensemble de toutes les fonctions m fois continûment dérivables sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f \in \mathscr{C}^m([a, b])$, elle est m fois dérivable sur tout l'intervalle $[a, b]$ est sa dérivée m-ième $f^{(m)}$ est une fonction continue sur $[a, b]$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ deux nombres réels et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a, b])$ une fonction $n+1$ fois continûment dérivable. On a l'égalité suivante, appelée "formule de Taylor avec reste intégral" :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \cdots + \tfrac{1}{k!}\,f^{(k)}(a)\,(b-a)^k + \cdots + \tfrac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(b-a)^n + \tfrac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\,f^{(n+1)}\big((1-t)\,a + t\,b\big)\,\mathrm{d}t.$$

La preuve consiste a démontrer d'abord la relation par récurrence sur l'entier n dans le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$ avec une intégration par parties. Puis à se ramener au cas général par le changement de fonction inconnue $\varphi(t) = f\big((1-t)\,a + t\,b\big)$.

- Formule de la moyenne

On suppose $a < b$, f fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et g fonction positive intégrable sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = f(c)\, \int_a^b g(t)\, \mathrm{d}t$.

- Changement de variable

On suppose $a < b$ et $\alpha < \beta$. On se donne une fonction f intégrable sur $[a, b]$ et une fonction $\varphi\,:\, [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ monotone, bijective et dérivable sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$:
$\forall x \in [a, b]$, $\exists !\, t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = x$. On a alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\, |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t$.
En imposant explicitement $\alpha < \beta$, nous avons volontairement donné ce résultat dans une formulation qui se généralise aux intégrales en dimension supérieure. Le lecteur pourra détailler ce que signifie la relation précédente dans le cas où la fonction φ est croissante et dans le cas où elle est décroissante.

Exercices

- Développement de Taylor

Quelle est la limite pour $x \longrightarrow 0$ de l'expression $f(x) = \frac{\sin x}{x^3} - \frac{1}{x^2}$?

- Intégration par parties pour le calcul d'une intégrale

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\, \sin t\, \mathrm{d}t$.

- Un changement de variable

Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, \sin^3 t\, \mathrm{d}t$.

- Du lemme de Rolle aux théorème des accroissements finis

On se donne deux nombres réels a et b de sorte que $a < b$ et une f continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$.
a) Rappeler quelle hypothèse complémentaire suppose le lemme de Rolle.
b) Que dit alors la conclusion ?
On pose $\varphi(x) = f(x) - \alpha\, (x - a)$.
c) Comment choisir le nombre α pour que la fonction φ satisfasse aux hypothèses du lemme de Rolle ?
d) En déduire une preuve du théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ de sorte que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

- Intégration par parties pour la formule de Taylor

On se donne un entier $n \in \mathbb{N}$ assez grand et une fonction $n+1$ fois continûment dérivable $\varphi \in \mathscr{C}^{n+1}([0, 1])$.
a) Montrer que $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$.
b) Avec une intégration par parties, en déduire $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\, \varphi''(t)\, \mathrm{d}t$.
c) Montrer à l'aide d'une nouvelle intégration par parties que l'on a
$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\, \varphi''(0) + \frac{1}{2}\, \int_0^1 (1-t)^2\, \varphi'''(t)\, \mathrm{d}t$.
d) Montrer par récurrence sur l'entier n la relation
$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\, \varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\, \varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{n!}\, \int_0^1 (1-t)^n\, \varphi^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$.

On se donne maintenant deux nombres réels a et b de sorte que $a < b$ et une fonction $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,\, b])$ $n+1$ fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a,\, b]$.

e) En posant $\varphi(t) = f\big((1-t)\,a + t\,b\big)$, établir la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \cdots + \tfrac{1}{k!}\,f^{(k)}(a)\,(b-a)^k + \cdots + \tfrac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(b-a)^n \\ + \tfrac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, f^{(n+1)}\big((1-t)\,a + t\,b\big)\,\mathrm{d}t.$$

- Erreur d'interpolation

On se donne deux réels a et b tels que $a < b$. Si φ est une fonction continue sur l'intervalle $[a,\, b]$, on pose $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,\,b]} |\varphi(x)|$.

(i) On étudie le cas particulier où $a = 0$ et $b = 1$. On se donne une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[0,\, 1]$, ce qui signifie que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle et que la dérivée f'' est continue sur $[0,\, 1]$. Pour une telle fonction, on construit sans difficulté l'interpolé affine Πf de f exact aux points 0 et 1 : Πf est l'unique fonction affine sur $[0,\, 1]$ de sorte que $(\Pi f)(0) = f(0)$ et $(\Pi f)(1) = f(1)$.

a) Donner l'expression algébrique en fonction de x de $\Pi f(x)$.

b) Démontrer que pour $x \in [0,\, 1]$ arbitraire, on a l'inégalité $|f(x) - (\Pi f)(x)| \leq \frac{1}{8}\, \|f''\|_\infty$.

c) En déduire l'erreur d'interpolation $\|f - \Pi f\|_\infty \leq \frac{1}{8}\, \|f''\|_\infty$.

(ii) On revient au cas général $a < b$, on pose $h = b - a$ et on se donne une fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[a,\, b]$. On introduit de façon analogue à la question précédente son interpolé affine Πg tel que $(\Pi g)(a) = g(a)$ et $(\Pi g)(b) = g(b)$.

d) Donner l'expression algébrique en fonction de x de $\Pi g(x)$.

e) Montrer que l'interpolation affine est "d'ordre deux" pour une fonction assez régulière, c'est à dire qu'on a l'estimation $\|g - \Pi g\|_\infty \leq \frac{1}{8}\, h^2\, \|g''\|_\infty$.

- Utilisation du théorème de la moyenne

On désigne par $\log$ le logarithme naturel. Pour $x \neq 1$, on pose $K(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$.

a) Quelle est la dérivée de la fonction $G(t) = \log\big(\log(t)\big)$?

b) Rappeler le théorème de la moyenne quand on intègre le produit de deux fonctions lorsque l'une des deux est de signe constant.

c) En utilisant les deux questions précédentes, calculer la limite pour $x \longrightarrow 1$ de l'intégrale $K(x)$.

- Lemme de Gronwall

On se donne un réel $\alpha \geq 0$, une fonction $v(x)$ continue positive ($v(x) \geq 0$) définie pour $x \geq 0$. On dispose aussi d'une seconde fonction u définie dans les mêmes conditions de sorte que $u(x) \leq \alpha + \int_0^x u(t)\, v(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \geq 0$.

a) On suppose (dans cette question seulement) qu'on a l'égalité $u(x) = \alpha + \int_0^x u(t)\, v(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$. Montrer qu'alors $u(x) = \alpha \exp\Big(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big)$.

Dans le cas général, on pose $g(x) = \alpha + \int_0^x u(t)\, v(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la fonction g est dérivable.

c) Calculer la dérivée de la fonction g.

d) Montrer que $g'(x) \leq v(x)\, g(x)$ pour tout $x \geq 0$.

e) En déduire que $g(x) \leq \alpha \exp\Big(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big)$ pour tout $x \geq 0$.

f) Démontrer l'inégalité $u(x) \leq \alpha \exp\Big(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\Big)$ valable pour tout $x \geq 0$.

• Une fonction non intégrable au sens de Riemann

Pour $r \in [0,\,1]$ rationnel, on pose $f(r) = 1$ et si $x \notin \mathbb{Q}$, on pose $f(x) = 0$. Cette fonction est appelée fonction caractéristique des nombres rationnels ; on se propose de démontrer que la fonction f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

On admet que le nombre d'Euler $e \simeq 1{,}718$ n'est pas rationnel.

a) Montrer que pour tout nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$, le nombre $x = r\,e$ est irrationnel.

On se donne deux nombres réels α et β de sorte que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

b) Démontrer qu'il existe au moins un nombre rationnel r tel que $\alpha < r < \beta$.

c) Démontrer qu'il existe au moins un nombre irrationnel de la forme $x = r\,e$ avec $r \in \mathbb{Q}$ de sorte que $\alpha < x < \beta$.

On se donne $\varphi \in \mathscr{E}_-(f)$ une fonction en escalier minorante et $\psi \in \mathscr{E}_+(f)$ une fonction en escalier majorante.

d) Si $]\alpha,\,\beta[$ désigne un intervalle où la fonction $\varphi \in \mathscr{E}_-(f)$ est constante, c'est à dire $\varphi(x) = \xi$ pour tout x tel que $\alpha < x < \beta$, démontrer que $\xi \leq 0$.

e) De façon analogue, si $]\alpha,\,\beta[$ désigne un intervalle où la fonction $\psi \in \mathscr{E}_+(f)$ est constante, c'est à dire $\psi(x) = \zeta$ pour tout x tel que $\alpha < x < \beta$, démontrer que $\zeta \geq 1$.

f) En déduire d'une part que ${}_*\!\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \sup\{\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x,\, \varphi \in \mathscr{E}_-(f)\} = 0$ et d'autre part que ${}^*\!\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \inf\{\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x,\, \psi \in \mathscr{E}_+(f)\} = 1$.

g) Conclure sur le fait que la fonction caractéristique des nombres rationnels n'est pas intégrable au sens de Riemann.