le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 9 Introduction à l'intégrale de Lebesgue

- Avant propos : limite supérieure et limite inférieure

On se donne une suite bornée $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou une suite $a_j \in \overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Toutes les propriétés qui suivent, valables pour des suites bornées, s'étendent sans difficulté aux suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\alpha_n = \sup\{a_k,\, k \geq n\}$ est bien définie et elle est décroissante : $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$. Donc elle converge vers une limite appelée limite supérieure de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On a par définition $\limsup a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} (\sup_{k\geq n} a_k)$.

De façon analogue, la suite $\beta_n = \inf\{a_k,\, k \geq n\}$ est une suite croissante : $\beta_{k+1} \geq \beta_k$. Elle converge vers sa borne supérieure qui définit la limite inférieure de la suie initiale :
$\liminf a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\inf_{k\geq n} a_k)$.

On a $\liminf a_k \leq \limsup a_k$ et toute suite extraite de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge a une limite ℓ comprise entre ces deux bornes : $\liminf a_k \leq \ell \leq \limsup a_k$.

On peut par ailleurs prouver sans difficulté particulière que si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, $\sup_{k\in\mathbb{N}} (-a_k) = -\inf_{k\in\mathbb{N}} a_k$.

On en déduit que si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de nombres réels, on a
$\liminf_{k\in\mathbb{N}} (-a_k) = -\limsup_{k\in\mathbb{N}} a_k$.

Enfin, si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux suites bornées de nombres réels telles que $a_k \leq b_k$ pour tout entier k, on a $\liminf_{k\in\mathbb{N}} a_k \leq \liminf_{k\in\mathbb{N}} b_k$ et $\limsup_{k\in\mathbb{N}} a_k \leq \limsup_{k\in\mathbb{N}} b_k$.

- Motivation

L'intégrale de Riemann repose sur la notion de fonction en escalier. Si $a < b$ désignent deux nombres réels, on se donne une subdivision
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_j < x_{j+1} < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ qui permet la découpe de l'intervalle $[a, b]$ en N intervalles de la forme $[x_j, x_{j+1}[$. Si on note χ_j la fonction caractéristique de l'intervalle $[x_j, x_{j+1}[$, c'est à dire $\chi_j(x) = 1$ si $x \in [x_j, x_{j+1}[$ et $\chi_j(x) = 0$ sinon, une fonction en escalier f peut s'écrire sous la forme $f = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\, \chi_j$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}$ sont des coefficients réels.

Alors l'intégrale de la fonction f a une expression tres simple :
$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\, (x_{j+1} - x_j)$. Avec la convention que l'intégrale de la fonction nulle sur un intervalle non borné est nulle. Dans l'expression $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\, (x_{j+1} - x_j)$, la différence $(x_{j+1} - x_j)$ est la longueur, ou la “mesure” de l'intervalle $[x_j, x_{j+1}[$.

La notion de fonction en escalier se généralise avec la notion de fonction étagée. Une fonction f de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs positives pour fixer les idées est étagée si et seulement si l'ensemble $f(\mathbb{R}^2) = \{f(y),\, y \in \mathbb{R}^2\}$ est fini. On note $\beta_0 = 0 < \beta_1 < \ldots < \beta_m$ les valeurs de cet ensemble :

François Dubois, novembre 2019.

$f(\mathbb{R}^2) = \{\beta_0, \beta, \ldots, \beta_m\}$. Pour $j = 0, 1, \ldots, m$, on note également
$A_j = f^{-1}(\beta_j) = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \beta_j\}$ l'ensemble antécédant de la valeur β_j.
Si A est une partie de $\mathbb{R}^2$, la fonction caractéristique χ_A de l'ensemble A vaut 1 pour un point de l'ensemble A et elle est égale à zéro sinon : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
Si une fonction f est étagée, on peut l'écrire $f = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \, \chi_{A_j}$. On note $|A_j| = \mu(A_j) = \int_{A_j} \mathrm{d}x$ la surface de l'ensemble $A_j \subset \mathbb{R}^2$. Alors avec $\beta_0 = 0$ et la convention que l'intégrale de la fonction nulle est toujours nulle, ce quelle que soit la surface sur laquelle on l'intègre, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \, \mu(A_j)$.
Cette approche à l'aide des fonctions étagées est le point de départ de la construction de l'intégrale au sens de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1875 – 1941).

- Fonction caractéristique des nombres rationnels

On introduit la fonction étagée φ qui caractérise les nombres rationnels entre 0 et 1 : $\varphi(x) = 1$ si $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $\varphi(x) = 0$ sinon. Nous avons vu dans un chapitre précédent que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann. Comme cette fonction est étagée, la relation précédente doit pouvoir s'appliquer, à condition de savoir répondre aux questions naturelles suivantes :
(i) Que sont les ensembles mesurables ? (ii) Qu'est-ce qu'une mesure ? (iii) Quel est le lien avec ce qui est déjà connu ? Nous savons en particulier que si $a < b$ sont deux nombres réels, l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t) \, \mathrm{d}t$ est bien définie si la fonction f est une fonction en escalier ou si elle est continue de l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Introduction aux ensembles mesurables : ensemble des parties d'un ensemble

Nous rappelons simplement dans les pages qui suivent quelques éléments fondamentaux de la théorie de la mesure, qui fonde le calcul des probabilités dans l'approche de Kolmogorov. Les preuves détaillées peuvent être consultées par exemple dans l'ouvrage *Analyse réelle et complexe* de Walter Rudin, Mc Graw Hill, Masson, Paris, 1975.
On considère un ensemble X quelconque. Nous notons $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble de ses parties : $\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}, \ldots, \{x, y\}, \ldots, X\}$. Si X est un ensemble fini qui comporte n éléments, c'est à dire $\sharp X = n$, alors l'ensemble des parties $\mathscr{P}(X)$ est fini et comporte 2^n éléments :
$\sharp\, \mathscr{P}(X) = 2^n$. Si l'ensemble X a un nombre infini d'éléments, l'ensemble des parties $\mathscr{P}(X)$ est également infini et son cardinal est "strictement plus grand" que celui de X.

- Tribu des parties mesurables d'un ensemble

Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble de ses parties : Une tribu $\mathscr{T}$ est un sous ensemble de $\mathscr{P}(X)$ tel que
(i) la famille $\mathscr{T}$ contient la partie pleine : $X \in \mathscr{T}$
(ii) la famille $\mathscr{T}$ est stable par complémentarité : si $A \in \mathscr{T}$, son complémentaire A^{c} appartient encore à $\mathscr{T}$
(iii) la famille $\mathscr{T}$ est stable par réunion dénombrable : si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathscr{T}$, alors $\big(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) \in \mathscr{T}$.
En théorie de la mesure, une tribu $\mathscr{T}$ définit les sous ensembles mesurables de l'ensemble X.

On a la propriété complémentaire : une tribu $\mathscr{T}$ est stable par intersection dénombrable. Si pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathscr{T}$, alors $\left(\cap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \in \mathscr{T}$.

- Fonction mesurable à valeurs réelles

On se donne une application f définie sur l'ensemble X et à valeurs réelles. On dit que f est mesurable pour la tribu $\mathscr{T}$ si et seulement si quels que soient $a < b$ deux nombres réels distincts, l'ensemble image réciproque $f^{-1}(]a,b[) = \{x \in X, f(x) \in]a,b[\}$ est un ensemble mesurable : $\forall a < b,\ f^{-1}(]a,b[) \in \mathscr{T}$.
Si on prend $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, alors toute fonction est mesurable. Ce choix correspond à la pratique des ingénieurs !

- Tribu engendrée par une partie

Soit $\mathscr{F}$ une famille de parties de l'ensemble X : $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$. Alors l'intersection de toutes les tribus qui contiennent $\mathscr{F}$ est une tribu notée $\mathscr{F}^*$: c'est, pour l'intersection, la plus petite tribu qui contient $\mathscr{F}$. On l'appelle tribu engendrée par $\mathscr{F}$.

- Tribu borélienne dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

C est un exemple tout à fait non banal de tribu engendrée par un ensemble de parties, ici les intervalles ouverts ou les produits d'intervalles ouverts.
On note $\mathscr{F}$ la réunion de tous les intervalles ouverts $]a,b[$ pour tous les nombres réels $a < b$: $\mathscr{F} = \{]a,b[,\ a < b \in \mathbb{R}\}$. La tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{F}^*$ s'appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, en hommage à Emile Borel (1871–1956).
Dans $\mathbb{R}^2$, on introduit l'ensemble $\mathscr{F} = \{]a,b[\times]c,d[,\ a < b \in \mathbb{R},\ c < d \in \mathbb{R}\}$ des rectangles du plan. La tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{F}^*$ engendrée par $\mathscr{F}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

- Fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$

La notion de fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ s'étend sans difficulté majeure aux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est à dire qui peuvent prendre les valeurs $+\infty$ et $-\infty$.
Si la fonction f est mesurable, les fonctions $f^+ = \max(0, f)$ et $f^- = -\min(0, f)$ sont encore mesurables.
Si toutes les fonctions f_j sont mesurables pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, alors les fonctions
$g = \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j$ et $h = \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j$ sont elles aussi mesurables. De façon très générale, si les fonctions f_j sont mesurables pour la tribu $\mathscr{T}$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, alors les fonctions limite supérieure $\limsup f_j$ et limite inférieure $\liminf f_j$ de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ sont mesurables pour la tribu $\mathscr{T}$.
Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle est mesurable pour la tribu borélienne.

- Composée d'une application mesurable et d'une fonction continue

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable relativement à une tribu $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ et à la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors la composée $g_{\text{o}}f$ définie de X et à valeurs réelles est mesurable pour la tribu $\mathscr{T}$.

- Fonctions étagées

Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction à valeurs réelles positives et mesurable pour la tribu $\mathscr{T}$. On dit que f est étagée si l'ensemble $f(X)$ est fini. On peut alors écrire la fonction f sous la forme $f = \sum_{j=0}^{m} \beta_j \, \chi_{A_j}$ avec $f(X) = \{\beta_0 = 0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m\}$ et
$A_j = f^{-1}(\beta_j) = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \beta_j\}$.

- Approximation d'une fonction mesurable positive par des fonctions étagées

On se donne $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction positive mesurable pour la tribu $\mathscr{T}$. Il existe une suite croissante $s_0 = 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_j \leq s_{j+1} \ldots$ de fonctions mesurables étagées majorées par la fonction f: $s_j \leq f$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et qui converge simplement vers la fonction f: $\forall x \in X, \; s_j(x) \longrightarrow f(x)$ si j tend vers l'infini.

- Mesure positive

On se donne un ensemble mesurable $(X, \mathscr{T})$. Une mesure μ est une application de $\mathscr{T}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$: $\mu(A)$ a un sens quel que soit l'ensemble mesurable $A \in \mathscr{T}$: c'est un nombre positif ou éventuellement $\mu(A) = +\infty$. On suppose que la mesure μ satisfait la propriété d'additivié dénombrable : si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{T}$ est formée d'ensemble disjoints deux à deux, Alors la mesure de leur réunion est égale à la somme de leurs mesures :
$\mu\left(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$.
On remarque que la somme $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$ composée de nombres tous positifs ou nuls peut être égale à $+\infty$. Si elle est finie, c'est à dire $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) < \infty$, alors la série à termes positifs de terme général $\mu(A_j)$ est convergente.
Exemples de mesure positives
(i) $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, μ mesure de comptage qui donne une mesure positive identique à tous les nombres entiers : $\mu(\{j\}) = 1$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$.
(ii) $X = \mathbb{R}$ et $\mathscr{T} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Il suffit de définir la mesure sur la famille qui engendre la tribu, à savoir pour les intervalles $]a, b[$ pour $a < b$. On pose $\mu(\{]a, b[\}) = (b - a)$; c'est la longueur de l'intervalle $]a, b[$.
(iii) $X = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{T} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, tribu engendrée par les rectanges du plan. On définit la mesure sur la famille des rectangles qui engendre la tribu. La mesure est simplement la surface du rectangle ; on pose $\mu(\{]a, b[\times]c, d[\}) = (b - a)(d - c)$. Ces deux exemples définissent la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
(iv) Si $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité sur l'ensemble mesurable $(X, \mathscr{T})$.
Si on se donne une mesure μ sur un ensemble mesurable $(X, \mathscr{T})$, on définit un ensemble mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$.

- Propriétés élémentaires des mesures positives

On se donne une mesure μ sur un ensemble mesurable $(X, \mathscr{T})$. On a les propriétés suivantes :
$\mu(\emptyset) = 0$
Si $A_j \cap A_k = \emptyset$ lorsque $j \neq k$, alors $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$
$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$

Si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_j \subset A_{j+1} \subset \ldots$ est une suite croissante de la tribu $\mathscr{T}$ et $A = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$, la suite $\mu(A_n)$ converge vers $\mu(A)$ si n tend vers l'infini
Soit A_1 tel que $\mu(A_1) \neq \infty$ et $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_j \supset A_{j+1} \supset \ldots$ une suite décroissante dans la tribu $\mathscr{T}$. Si on pose $A = \cap_{j\in\mathbb{N}} A_j$, la suite $\mu(A_n)$ converge vers $\mu(A)$ si n tend vers l'infini.

- Arithmétique dans $[0, +\infty]$

Les règles de calcul dans l'ensemble des nombres positifs auxquels on adjoint le symbole $+\infty$ sont les suivantes. Pour l'addition, si $a \in [0, +\infty]$, alors $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$. Pour la multiplication, $a\,.\,(+\infty) = (+\infty)\,.\,a = +\infty$ si $a > 0$. Enfin, $0\,.\,(+\infty) = (+\infty)\,.\,0 = 0$.

- Intégration des fonctions positives

On se donne une mesure μ sur un ensemble mesurable $(X, \mathscr{T})$ et une fonction positive étagée $f : X \longrightarrow [0, +\infty[$: $f(A) = \{\alpha_0, \ldots \alpha_N\}$. On pose $A_j = f^{-1}(\alpha_j) = \{x \in X, f(x) = \alpha_j\}$. On rappelle qu'alors l'intégrale de Lebesgue de cette fonction est donnée par la relation
$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j\,\mu(A_j)$. On adopte la convention $0\,.\,(+\infty) = (+\infty)\,.\,0 = 0$ afin que l'intégrale soit toujours bien définie, même si l'ensemble X est de mesure infinie.
Si maintenant $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive et possiblement égale à $+\infty$ pour certaines valeurs de l'argument, on sait qu'il existe une suite s_j de fonctions étagées telles que $s_j \leq f$ et qui converge simplement vers f. On introduit l'ensemble $\mathscr{E}_-(f)$ des fonctions étagées minorantes : $\mathscr{E}_-(f) = \{s$ étagée, $s \leq f\}$. On définit l'intégrale de Lebesgue de la fonction f par la relation $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sup_{s\in\mathscr{E}_-(f)} \left(\int_X s\,\mathrm{d}\mu\right)$.
Cette définition est plus souple que celle de l'intégrale de Riemann qui a besoin à la fois des fonctions en escalier minorantes et des fonctions en escalier majorantes. Mais nous avons dû introduire pour construire l'intégrale de Lebesgue tout un ensemble de nouvelles notions avec les ensembles mesurables et les mesures.

- Intégrale pour la mesure de comptage et séries

On prend $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de comptage. Une fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$ peut s'écrire également $f(j) = u_j$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, avec $u_j \geq 0$ éventuellement égal à $+\infty$. La fonction s_n définie par $s_n(j) = u_j$ si $j \leq n$ et $u_j \leq n$,
$s_n(j) = n$ si $j \leq n$ et $u_j \geq n$ et $s_n(j) = 0$ si $j \leq n+1$ est étagée. Elle est toujours inférieure ou égale à la fonction f et converge en croissant vers f. On a $\int_X s_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=0}^{n} \inf(u_j, n)$ qui converge vers $\sum_{j=0}^{\infty} u_j = \int_{\mathbb{N}} f\,\mathrm{d}\mu$. L'intégrale de Lebesgue permet de traiter les séries comme cas particulier associé à la mesure de comptage.

- Propriétés fondamentales de l'intégrale

On se donne un ensemble mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et une fonction $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurable positive. On a les propriétés suivantes :
Si $0 \leq f \leq g$, alors $0 \leq \int_X f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g\,\mathrm{d}\mu$
Si $A \subset B$ et $f \geq 0$, alors $0 \leq \int_A f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_B f\,\mathrm{d}\mu$
Si $f \geq 0$ et c tel que $c \in [0, +\infty[$ ou $c = +\infty$, alors $\int_X (c\,f)\,\mathrm{d}\mu = c\,\int_X f\,\mathrm{d}\mu$
Si $A \in \mathscr{T}$ et $f \geq 0$, alors $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\chi_A\,\mathrm{d}\mu$, où χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.
Si $\forall x \in A$, $f(x) = 0$, alors $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = 0$, même si $\mu(A) = +\infty$

Si $\mu(A)=0$, alors $\int_A f\,\mathrm{d}\mu=0$, même si $f(x)=+\infty$ pour tout $x\in A$
Si les fonctions f et g sont positives, alors $\int_A (f+g)\,\mathrm{d}\mu=\int_A f\,\mathrm{d}\mu+\int_A g\,\mathrm{d}\mu$.

- Théorème de convergence monotone de Lebesgue

On se donne un espace mesuré $(X,\mathscr{T},\mu)$ et une suite $0\leq f_1\leq f_2\leq\cdots\leq f_j\leq f_{j+1}\leq\ldots$ de fonctions mesurables. On suppose que pour tout $x\in X$, la suite $f_j(x)$ converge vers $f(x)$ si j tend vers l'infini. Alors la fonction f est mesurable et la suite des intégrales $\int_X f_j\,\mathrm{d}\mu$ converge vers $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

- Second énoncé du théorème de convergence monotone

Soit $f_j : X\longrightarrow[0,+\infty]$ une suite de fonctions mesurables pour la tribu $\mathscr{T}$. On pose
$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$. Alors cette fonction est mesurable et $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=0}^{\infty}\int_X f_j\,\mathrm{d}\mu$.
Ce résultat permet l'intervertion sans difficulté des symboles d'intégration $\int$ et de sommation $\sum$ pour les fonctions positives : $\int_X\big(\sum_{j=0}^{\infty} f_j\big)\,\mathrm{d}\mu=\sum_{j=0}^{\infty}\big(\int_X f_j\,\mathrm{d}\mu\big)$.

- Série double à termes positifs

Soit $a_{ij}\geq 0$ le terme général, pour $i,\,j\in\mathbb{N}$, d'une série double. Alors $\sum_i\big(\sum_j a_{ij}\big)=\sum_j\big(\sum_i a_{ij}\big)$.

- Lemme de Fatou (Pierre Fatou, 1878–1929)

Soit $f_k : X\longrightarrow[0,+\infty]$ une suite de fonctions mesurables et positives. Alors on a
$\int_X(\liminf f_k)\,\mathrm{d}\mu\;\leq\;\liminf\big(\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu\big)$.
La preuve du lemme de Fatou consiste à revenir à la définition de la limite inférieure. Soit $g_n(x)=\sup_{k\geq n} f_k(x)$. Alors la famille de fonction g_n est croissante et converge simplement vers $\liminf f_k$. De l'inégalité $g_n(x)\leq f_n(x)$, on tire $\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu\leq\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$. On passe à la limite inférieure pour ces deux suites numériques : $\liminf\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu\leq\liminf\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$. Comme la suite g_n converge en croissant vers $\liminf f_n$, le théorème de convergence monotone entraîne que $\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu$ est une suite convergente vers $\int_X(\liminf f_n)\,\mathrm{d}\mu$. Alors
$\liminf\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu=\int_X(\liminf f_n)\,\mathrm{d}\mu$. D'ou le résultat car
$\liminf\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu\leq\liminf\big(\int_X f_n\big)\,\mathrm{d}\mu$.

- Fonctions intégrables

Il est temps maintenant de donner un signe aux fonctions. On se donne un espace mesuré $(X,\mathscr{T},\mu)$. On pose définit l'ensemble $\mathscr{L}^1(\mu)$ des fonctions sommables, ou intégrables au sens de Lebesgue, par la relation $\mathscr{L}^1(\mu)=\{f$ mesurable $X\longrightarrow\mathbb{R},\;\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty\}$.
Attention une fonction intégrable est par définition une fonction à valeurs réelles, et non à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$.
Si $f\in\mathscr{L}^1(\mu)$, alors les fonctions $f^+=\max(0,f)$ et $f^-=-\min(0,f)$ sont positives et mesurables. On a $f=f^+-f^-$, $|f|=f^++f^-$, $0\leq f^+\leq|f|$ et $0\leq f^-\leq|f|$.
L'extension aux fonctions à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ est immédiate : il suffit de séparer partie réelle et partie imaginaire.

- Intégrale de Lebesgue d'une fonction intégrable

Si $f\in\mathscr{L}^1(\mu)$, alors $\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$ est fini : $\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu<\infty$. Donc les intégrales $\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu$ et $\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu$ sont des nombres positifs ou nuls. On pose alors $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\,\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu$.
Cette relation définit l'intégrale de f comme différence de deux nombres réels.

- Linéarité de l'intégrale

On se donne deux fonctions intégrables $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ et deux nombres réels α et β. Alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable et on a
$\int_X (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

- Une majoration fondamentale

Si la fonction f est intégrable sur l'espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a l'inégalité
$| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \,| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$.

- Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit f_k une suite de fonctions mesurales qui converge simplement vers une fonction f :
$\forall x \in X, \; f_k(x) \longrightarrow f(x)$ si $k \longrightarrow \infty$. On suppose que cette convergence est dominée : il existe une fonction intégrable positive g telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et
pour tout $x \in X$, $|f_k(x)| \leq g(x)$. Rappelons que l'intégrale $\int_X g \, \mathrm{d}\mu$ est finie puisque $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.
Alors la fonction f est intégrable : $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, les intégrales de la valeur absolue des écarts entre f_k et la limite f tendent vers zéro : $\int_X |f - f_k| \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0$ et la limite des intégrales est égale à l'intégrale de la limite : $\lim_{k \longrightarrow \infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.
La preuve consiste essentiellement à appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions positives $\varphi_k = 2g - |f - f_k|$.

- Epilogue sur la fonction caractéristique des rationnels

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\{x\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et sa mesure de Lebesgue est nulle. Comme l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable, on peut écrire $\mathbb{Q}$ comme une réunion dénombrable de nombres ξ_j : $\mathbb{Q} = \cup_{j \in \mathbb{N}} \xi_j$. Donc l'ensemble $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle et l'intégrale de sa fonction caractéristique $\chi_{\mathbb{Q}}$ est nulle également.

Exercices [empruntés à Petru Mironescu, Université Lyon 1, 2019]

- Utilisation du théorème de convergence dominée

On se donne une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$: $\int_0^\infty |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$.
Quelle est la limite de la suite $I_n = \int_0^\infty f(x) \, \frac{x}{x+n} \, \mathrm{d}x$ si n tend vers l'infini ?

- Utilisation du théorème de convergence monotone

On se donne n entier ≥ 1 et x réel positif. On pose $I = \sum_{n \geq 3} \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^n} \, \mathrm{d}x$.

a) A l'aide du théorème de convergence monotone, montrer que $I = \int_0^\infty \left(\sum_{n \geq 3} \frac{x}{(1+x)^n} \right) \mathrm{d}x$.

b) Terminer le calcul du nombre I.

- Utilisation non banale du théorème de convergence dominée

On se donne n entier ≥ 2 et pour $x \geq 0$, on pose $g_n(x) = \frac{|\sin x|^n}{x^2}$. On note I_n l'intégrale de g_n sur $[0, \infty[$: $I_n = \int_0^\infty \frac{|\sin x|^n}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

a) Montrer que l'intégrale I_n est bien définie au sens de Lebesgue.

b) Montrer que si $x \geq 1$, $|g_n(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

c) Montrer que si $x \in [0, 1]$, $|g_n(x) \leq 1$.

d) En déduire qu'il existe une fonction g intégrable sur $[0, \infty[$ et que l'on précisera de sorte que $\forall x \in [0, \infty[$, $|g_n(x)| \leq g(x)$.

e) Quelle est la limite simple de la suite de fonctions g_n ?

f) En déduire la limite de l'intégrale I_n si n tend vers l'infini.

• Mettre en défaut le théorème de convergence dominée ?

Pour k entier ≥ 1 et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(x) = k\,(1-x)^k \, \sin^2(kx) \, \chi_{[0,\,1]}(x)$.

a) Quelle est la limite simple de la suite f_k ?

b) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\exp(-u) \geq 1-u$.

c) En déduire que la suite $I_k = \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\frac{2}{5}$.

d) Les conclusions du théorème de convergence dominée sont-elles satisfaites ?