le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2019

Cours 07

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 7

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites *

- Applications linéaires continues
- Accroissements finis
- Homéomorphie
- Théorème d'inversion locale
- Théorème des fonctions implicites

* François Dubois, 2013, édition septembre 2015, 25 pages.

AMI

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

① Applications linéaires continues.

- Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues $E \to F$. C'est naturellement un espace vectoriel. Il est normé grâce à la définition classique de la norme $\|A\|$ d'une application linéaire continue A :

$$(1) \quad \|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|A \cdot x\|_F .$$

[la preuve constitue un exercice classique laissé au lecteur].

On a la propriété importante

Prop ① Complétude.

Avec les notations précédentes, si l'espace F est complet (ie si F est un espace de Banach), alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet (c'est également un espace de Banach) pour $\|\cdot\|$ définie en (1).

Preuve de la proposition (1)

* On se donne une suite de Cauchy $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues de E dans F ; on a $u_k \in \mathcal{L}(E,F)$ et

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall k,\ell \geq N, \|u_k - u_\ell\| \leq \varepsilon$.

Alors pour tout $x\in F$, la suite de vecteurs de F $(u_k\cdot x)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F : $\|u_k\cdot x - u_\ell\cdot x\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$ et est arbitrairement petit pour k,ℓ assez grands. Comme F est complet, cette suite converge vers un vecteur de F qu'on note $u\cdot x$; on vient de définir u, application $E\to F$, limite simple de la suite $u_k\cdot x$.

* L'application u est linéaire. En effet, pour tout $k\in\mathbb{N}$, u_k est linéaire donc pour tout x et y dans E, $u_k(x+y) - u_k\cdot x - u_k\cdot y = 0$.
Si $k\to\infty$, ces trois suites de vecteurs convergent vers $u\cdot(x+y)$, $u\cdot x$ et $u\cdot y$ respectivement. La relation de linéarité passe à la limite et pour tout $x,y\in E$, $u(x+y) - u\cdot x - u\cdot y = 0$.
On établit de façon analogue que pour tout $x\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $u\cdot(\lambda x) - \lambda u\cdot x = 0$

* Il reste à montrer que u est continue, i.e. $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et que $\|u_k - u\| \to 0$ si $k \to \infty$.
On montre que u est continue en tout point x de norme $\leq R$ (où R réel fixé). Plus précisément, on montre que la convergence de $u_k \cdot x$ vers $u \cdot x$ est uniforme dans le disque fermé $\tilde{B}(0,R) = \{x \in E, \|x\|_E \leq R\}$. Alors la continuité de u résulte de la continuité des u_k et du théorème classique qui énonce que la limite uniforme d'une suite d'applications continues est elle-même continue.
Or si $\|x\|_E \leq R$, on a

$$\|u_k \cdot x - u_\ell \cdot x\|_F \leq \|u_k - u_\ell\| \, \|x\|_E \leq \|u_k - u_\ell\| R$$

et cette quantité peut être rendue arbitrairement petite si k, ℓ assez grands compte tenu de (1).
La convergence est donc uniforme sur les bornés.
Donc u est continue sur $B(0,R) = \{x \in E, \|x\|_E < R\}$. Comme R est arbitraire, u est continue sur E tout entier.

* La fin de la preuve consiste à écrire la relation précédente avec $x \in \tilde{B}(0,1)$: $\|u_k \cdot x - u_\ell \cdot x\|_F \leq \|u_k - u_\ell\| \leq \varepsilon$ si $k, \ell \geq N$. À x fixé on fait tendre ℓ vers $+\infty$; alors $u_\ell \cdot x \to u \cdot x$ dans F.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \|u_k \cdot x - u \cdot x\|_F \leq \varepsilon$ et ceci est vrai $\forall x \in \tilde{B}(0,1)$, donc
$\sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|u_k \cdot x - u \cdot x\|_F \leq \varepsilon$ si $k \geq N$. Compte tenu de (1), $\|u_k - u\| \leq \varepsilon$; ce qui exprime finalement que $u_k \to u$ dans l'espace $\mathcal{L}(E,F)$. La démonstration est achevée.

$\square$

Prop ② Inverse au voisinage de l'identité.

Soit E un espace de Banach, Id l'application $E \ni x \mapsto x \in E$ et $\varepsilon \in \mathcal{L}(E) \equiv \mathcal{L}(E,E)$ de norme strictement inférieure à l'unité. Alors la suite d'opérateurs

(3) $v_k = Id + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^k$, $k \in \mathbb{N}$

converge, pour $k \to \infty$ vers $v \in \mathcal{L}(E)$ qui satisfait à $v(Id - \varepsilon) = (Id - \varepsilon)\, v = Id$.

On rappelle d'abord que dans $\mathcal{L}(E)$, la norme donne à cet espace une structure d'algèbre de Banach ; on a en effet

(4) $\|AB\| \leq \|A\|\, \|B\|$, $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

Preuve de la proposition (2)

La suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E)$. En effet,

$$\|v_{k+m} - v_k\| \leqslant \|\varepsilon^{k+1} + \varepsilon^{k+2} + \cdots + \varepsilon^{k+m}\|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\varepsilon^{k+j}\|$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} \|\varepsilon\|^{k+j} \quad \text{cf (4)}$$
$$\leqslant \|\varepsilon\|^{k+1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\varepsilon\|^{\ell} = \frac{1}{1-\|\varepsilon\|} \|\varepsilon\|^{k+1}$$

qui tend vers 0 pour k tendant vers l'infini car $0 \leqslant \|\varepsilon\| < 1$.

* Comme $\mathcal{L}(E)$ est complet, v_k converge vers v, $v \in \mathcal{L}(E)$. De la relation facile

$$v_k(Id - \varepsilon) = Id - \varepsilon^{k+1} = (Id-\varepsilon)\, v_k$$

on déduit en passant à la limite pour $k \to \infty$:

$$v(Id-\varepsilon) = (Id-\varepsilon)\, v = Id. \quad \square$$

Prop (3) L'ensemble des isomorphismes est ouvert.

Soient E et F deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F et $Isom\,(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F ($u \in \mathrm{Isom}(E,F)$ est linéaire continu bijectif de E sur F et u^{-1} est continu de F sur E) est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$. De plus l'application $\mathrm{Isom}(E,F) \ni u \mapsto u^{-1} \in \mathrm{Isom}(F,E)$ est continue.

Preuve de la Proposition (3).

* on a vu que $B(I,1) \subset \mathrm{Isom}(E,E)$ si E est un espace de Banach (Proposition 2). Il se peut très bien que $\mathrm{Isom}(E,F)$ soit vide si les deux espaces E et F ne sont pas isomorphes. Alors c'est bien un ouvert de $\mathcal{L}(E,F)$ et la propriété est satisfaite; la seconde partie de la proposition est alors sans objet.
* si $\mathrm{Isom}(E,F)$ contient u_0, on se ramène au cas précédent en cherchant u sous la forme

$$(5) \qquad u = u_0 + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathcal{L}(E,F).$$

Alors $u_0^{-1} u = I + u_0^{-1}\varepsilon \in \mathrm{Isom}(E,E)$ si on est certain que $\|u_0^{-1}\varepsilon\| < 1$. Supposons

$$(6) \qquad \|\varepsilon\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$$

Alors $\|u_0^{-1}\varepsilon\| \leq \|u_0^{-1}\| \, \|\varepsilon\|$ (cf (4))

$$< \|u_0^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|u_0^{-1}\|} = 1 \quad (\text{cf}(6)).$$

* Si $u \in B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right)$, alors $u_0^{-1}u$ est inversible et la proposition 2 montre que

$$(u_0^{-1}u)^{-1} = I - u_0^{-1}\varepsilon + u_0^{-1}\varepsilon u_0^{-1}\varepsilon - \cdots$$

Comme $(u_0^{-1}u)^{-1} = u^{-1}u_0$, on a après multiplication de la relation précédente par u_0^{-1} :

$$(7) \quad u^{-1} = u_0^{-1} - u_0^{-1}\varepsilon u_0^{-1} + u_0^{-1}\varepsilon u_0^{-1}\varepsilon u_0^{-1} - \cdots$$

On a donc montré que si $u_0 \in \text{Isom}(E,F)$, alors
$$B\left(u_0, \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right) \subset \text{Isom}(E,F)$$
et au voisinage de u_0, $(u_0+\varepsilon)^{-1}$ est donné par la relation (7). Comme le reste de la série est clairement de la forme $\|\varepsilon\|\,\varphi(\varepsilon)$ où $\varphi(\varepsilon)$ tend vers 0 si ε tend vers 0, on déduit de (7) :

$$(8) \quad du^{-1}(u_0)\cdot h = -u_0^{-1}h\,u_0^{-1}, \quad h \in \mathcal{L}(E,F)$$

et $\mathcal{L}(E,F) \ni u \longmapsto u^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ est différentiable au voisinage de chaque "point" de $\text{Isom}(E,F)$. On en déduit la continuité. $\square$

② Accroissements finis

La "formule des accroissements finis" se généralise aux applications à valeurs vectorielles sous la forme d'une inégalité.

Th ① Inégalité des accroissements finis.

Soient $a < b$ deux nombres réels, F un espace de Banach, $f : [a,b] \to F$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues et différentiables en tout point de $]a,b[$. On suppose

$$(9) \quad \forall x \in]a,b[, \; \| df(x) \| \leq g'(x).$$

Alors on a

$$(10) \quad \| f(b) - f(a) \| \leq g(b) - g(a).$$

Preuve du théorème ①.

* On se donne $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous allons démontrer que l'on a

$$(11) \; \forall x \in [a,b], \; \| f(x) - f(a) \| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon.$$

alors l'inégalité (10) résulte de (11) appliqué pour $x = b$, en faisant tendre ε vers zéro.

* Soit U l'ensemble des x de $[a,b]$ tels que l'inégalité présente dans (11) est fausse :

(12) $U = \{x \in [a,b] \, , \|f(x)-f(a)\| > g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon\}$

Si U n'est pas vide, c'est à dire si (11) est en défaut, nous allons aboutir à une contradiction.
Si $U \neq \phi$, U est ouvert car f et g sont continues $[a,b] \to F$ et $\mathbb{R}$ respectivement. Soit $c = \inf U$.

- alors $c > a$ car pour $x = a$, $\varepsilon > 0$ donc dans un intervalle de la forme $[a, a+\eta[$, $\eta > 0$ assez petit, on a $\|f(x)-f(a)\| < g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon$. Donc $[a, a+\eta[\, \subset U^c$ et $c > a$
- $c \notin U$ car U est ouvert
- $c < b$ sinon $U = \{b\}$ qui n'est pas un ouvert.

* on utilise l'hypothèse (9) au point c : $\|df(c)\| \leq g'(c)$
donc $f(x) - f(c) = df(c) \cdot (x-c) + \|x-c\| \, \tilde{\varepsilon}(x-c)$
avec $\tilde{\varepsilon}(x-c) \to 0$ si $x \to c$

Il existe $\theta > 0$ assez petit tel que si $c < x \leq c+\theta$,

$$\|df(c)\| \geq \left\| \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

de même, $$g'(c) \leq \frac{g(x)-g(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

En combinant les deux inégalités précédentes, et l'hypothèse $g'(c) \geq \|df(c)\|$,

$$\|f(x)-f(c)\| \leq g(x)-g(c) + \varepsilon(x-c)$$

Comme $c \notin U$, on a

$$\|f(c)-f(a)\| \leqslant g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon .$$

On somme les deux inégalités précédentes pour $c \leqslant x \leqslant c+\theta$: $\|f(x)-f(a)\| \leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon$.

La différentiabilité en c a permis de gagner un petit intervalle et $\inf U \geqslant c+\theta$, ce qui contredit la définition de c !

(R) Une lecture précise du livre d'Henri Cartan ("Calcul différentiel", Hermann, Paris, 1967) montre qu'on peut affaiblir les hypothèses du théorème 1 tout en conservant la conclusion.

Nous avons besoin dans la suite d'une notion quelque peu technique

(def) application strictement différentiable.

Soient E et F deux espaces normés, $a \in E$ et f définie au voisinage de a et à valeurs dans F. On dit que f est strictement différentiable en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ de sorte que dans la boule de centre a et de rayon r, l'application $\varphi(x)$ définie par

(12) $\varphi(x) \equiv f(x) - f(a) - df(a) \cdot (x-a)$
est ε-lipschitzienne :

(13) $\forall x, y \in B(a,r) \quad \|f(x) - f(y) - df(a) \cdot (x-y)\|_F \leqslant \varepsilon \|x-y\|_E$.

Prop (4) Condition suffisante de stricte différentiabilité

Soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire que la différentielle $df(x)$ est une application continue de U à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$), $a \in U$. Alors f est strictement différentiable en a.

Preuve de la proposition (4)

Soit $g(x) \equiv f(x) - f(a) - df(a) \cdot (x-a)$.
Alors g est différentiable sur U et $dg(x) = df(x) - df(a)$. Comme $U \ni x \mapsto dg(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, $\lim\limits_{x \to a} \|dg(x)\| = 0$ et

$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \|x-a\| < r \Rightarrow \|dg(x)\| \leqslant \varepsilon$.

On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis (9) entre deux points x, y dans la boule $B(a,r)$: $\|g(x) - g(y)\|_F \leqslant \varepsilon \|x-y\|_E$, ce qui exprime exactement l'inégalité (13) et prouve que f est strictement différentiable en a. $\square$

(3) Homéomorphie

Nous donnons le cadre fonctionnel dans lequel va travailler la preuve du théorème d'inversion locale

Hyp du théorème d'inversion locale.

On se donne E, F deux espaces de Banach (donc complets), U un ouvert de E et $f : U \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U $[f \in \mathcal{C}^1(U, F)]$.
On se donne un point $a \in U$ tel que la différentielle en a est un isomorphisme de E sur F :

(14) $\quad df(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$, $a \in U$

Nous allons montrer un résultat préliminaire : quitte à réduire U en V, f est un homéomorphisme de V ($V \ni a$) sur un ouvert W de F, W contenant $b = f(a)$. La fonction f est bijective $V \to W$ et f^{-1} est continue $W \to V$.
C'est une première étape vers le théorème d'inversion locale

Nous montrons d'abord ce résultat pour une perturbation de l'identité, avec la

Th ② d'homéomorphie.

Soit E un espace de Banach, $r>0$, $f: B(a,r) \to E$ telle que $\varphi(x) \equiv x - f(x)$ est contractante, c'est à dire k-lipschitzienne avec une constante k telle que $0 \leq k < 1$. On pose $f(a) = b$. Alors il existe un ouvert V de E, $a \in V \subset B(a,r)$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur la boule ouverte $B(b,(1-k)r)$. De plus, l'application réciproque $g = f^{-1} : B(b,(1-k)r) \to B(a,r)$ est $\frac{1}{1-k}$ lipschitzienne.

Preuve du Théorème ②

* On montre d'abord que pour tout $y \in B(b,(1-k)r)$ il existe un et un seul $x \in B(a,r)$ tel que $f(x) = y$. Pour cela, on regarde la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par

(15) $\quad x_0 = a \;, \quad x_{n+1} = y + \varphi(x_n),\ n \in \mathbb{N}.$

Il faut vérifier que cette suite est bien définie pour tout n, i.e. $x_{n+1} \in B(a,r)$. Plus précisément, nous allons montrer par récurrence que l'on a

$$(16) \qquad \|x_n - a\| \leq \frac{1-k^n}{1-k} \|y-b\|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Pour $n=0$, (16) est clair et pour $n=1$, $x_1 = y + \varphi(a)$, donc $x_1 - a = y + \varphi(a) - a = y - f(a) = y - b$ donc $\|x_1 - a\| = \|y-b\|$ et (16) est vraie avec $n=1$.

* Si la propriété est vraie à l'ordre n, on a
$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$, donc

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq k^n \|x_1 - x_0\| = k^n \|y-b\|$$

D'où

$$\|x_{n+1} - a\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - a\|$$
$$\leq \left(k^n + \frac{1-k^n}{1-k}\right) \|y-b\|$$

vu ce qui précède et l'hypothèse de récurrence.

Donc $\|x_{n+1} - a\| \leq \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} \|y-b\| < r$ si $y \in B(b, (1-k)r)$. Donc la relation (16) est établie et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste toujours dans la boule $B(a,r)$.

* La série de terme général $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est normalement convergente

puisque $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|y-b\|$ pour tout n.
Donc x_n converge vers $x \in E$. Si on passe à la limite dans (16), on déduit

$$\|x-a\| \leq \frac{1}{1-k} \|y-b\| < r \text{ si } (1-k)\|y-b\| < r$$

De plus, quand on passe à la limite dans (15), $y = x - \varphi(x) = f(x)$.

* L'unicité de $x \in B(a,r)$ tel que $f(x) = y$ résulte du calcul suivant : on a

$$f(x) - f(x') = x - x' + \varphi(x') - \varphi(x)$$

et
$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x')\| &\geq \|x-x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \\ &\geq \|x-x'\| - k\|x-x'\| \\ &\geq (1-k)\|x-x'\|\end{aligned}$$

si $f(x) = f(x')$, alors $\|x-x'\| \leq 0$ car $1-k > 0$

* On note $g(y)$ l'unique $x \in B(a,r)$ tel que $f(x) = y$
D'où $g : B(b,(1-k)r) \to B(a,r)$ qui satisfait, compte tenu des inégalités précédentes, à
$\|g(y) - g(y')\| \leq \frac{1}{1-k} \|y-y'\|$, donc g est $\frac{1}{1-k}$ lipschitzienne comme annoncé.

* Enfin, $V = f^{-1}(B(b,(1-k)r)) \subset B(a,r)$ est ouvert car f est continue. Donc $f : V \to B(b,(1-k)r)$ est bijective continue et il en est de même de $g : B(b,(1-k)r) \to V$; f et g sont mutuellement réciproques. $\square$

(Prop) (5) Un homéomorphisme

Soient E et F deux espaces de Banach, U non vide un ouvert de E, $f : U \to F$ continue sur U strictement différentiable en $a \in U$ (voir la définition pages 10 et 11, la relation (13) en particulier) ; on suppose $df(a) \in Isom(E,F)$ alors il existe V voisinage ouvert de a, $V \subset U$ et W ouvert inclus dans F, $f(a) = b \in W$ tel que f soit un homéomorphisme de V sur W.

Preuve de la proposition (5)

- on se ramène au théorème d'homéomorphie (Th 2). On pose $f_1 = (df(a))^{-1} \circ f$ qui est définie de U dans E. On pose $\varphi(x) = x - f_1(x)$. Comme f_1 est strictement différentiable en a, il en est de même de f_1 et vu que $df_1(a) = (df(a))^{-1} \circ df(a) = id(E)$, l'application φ est ε lipschitzienne dans une boule $B(a,r)$ avec $r>0$ assez petit. On se donne k tel que $0<k<1$ et on fixe $\varepsilon = k$ dans la suite. Alors φ est contractante dans $B(0,r)$ et on peut utiliser le théorème 2 d'homéomorphie.

* Alors il existe V ouvert, $a \in V \subset B(a,r)$ et W_1 voisinage ouvert de $b_1 = f_1(a)$ tel que

f_1 soit un homéomorphisme de V sur W_1.
Par hypothèse, $df(a)$ est un homéomorphisme de E dans f ; donc $f = df(a) \circ f_1$ est un homéomorphisme de V sur $W = df(a)(W_1)$. D'où le résultat.

$\square$

- Début de la preuve du théorème d'inversion locale avec les hypothèses de la page 12, la proposition 4 assure que f est strictement différentiable au point $a \in U$. De plus, l'hypothèse (I4) ($df(a)$ est un isomorphisme) permet de mettre en oeuvre la proposition 5 : il existe V_1 voisinage de a, $a \in V_1 \subset U$ et il existe W_1 ouvert inclus dans F, $f(a) = b \in W_1$ tel que f soit un homéomorphisme de V_1 sur W_1.

(R) Le théorème d'inversion locale (énoncé plus loin !) affirme que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $V \ni a$, V ouvert sur $W \ni f(a)$ avec W ouvert de F. Cette propriété est plus forte que ce début de preuve car un homéomorphisme n'est pas forcément dérivable ainsi que l'application réciproque !

En effet, l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, c'est une application différentiable et même de classe $\mathscr{C}^1$. Pourtant, l'application réciproque $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ n'est <u>pas</u> différentiable en zéro.

(4) Théorème d'inversion locale

Nous allons dans ce paragraphe achever la preuve du théorème suivant.

(Th) (3) Inversion locale

Les hypothèses ont été énoncées page 12 : E et F sont deux espaces de Banach, U est un ouvert de E et $f : U \to F$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ ($U \ni x \mapsto df(x) \in \mathcal{L}(E,F)$ est une application continue sur U). On se donne $a \in U$ de sorte que (14) a lieu : $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

Alors il existe V voisinage ouvert de a : $a \in V \subset U$, il existe W voisinage ouvert de $f(a) = b \in W \subset F$ tels que f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme de V sur W [i.e. f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ de W sur V].

Prop 6 Critère de différentiabilité de l'application réciproque.

Soient E et F deux espaces de Banach, V ouvert $\subset E$, W ouvert $\subset F$, f un homéomorphisme de V sur W. On suppose f différentiable en $a \in V$. Alors $g = f^{-1}$ est différentiable en $b = f(a)$ si et seulement si $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Alors $dg(b) = (df(a))^{-1}$.

Preuve de la proposition 6

* la condition est nécessaire. Si g est différentiable en b, $dg(b) \circ df(a) = id_E$ et $df(a) \circ dg(b) = id_F$, donc $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

* la condition est suffisante. Si $df(a) \in \mathrm{Isom}(E,F)$, montrons que g est différentiable en $b = f(a)$. Si $y = f(x)$, on a (puisque f est différentiable en a) :

$$y - b = df(a) \cdot (x-a) + \|x-a\| \, \varepsilon(x-a).$$

on applique $df(a)^{-1}$ aux deux membres de cette égalité. On en déduit :

$$x - a = (df(a))^{-1} \circ (y-b) - \|x-a\| \, df(a)^{-1} \circ \varepsilon(x-a)$$

Etudions $\psi(x-a) \equiv (df(a))^{-1} \circ \varepsilon(x-a)$. On déduit de l'égalité précédente

$$\|(df(a))^{-1} \circ (y-b)\| \geq \|x-a\| \left[1 - \|\psi(x-a)\|\right]$$

donc $\|x-a\| \leqslant \frac{1}{1-\|\psi\|} \|df(a)^{-1}\| \, \|y-b\|$

puisque $\psi(x-a)$ tend vers 0 si x tend vers a.

Donc $\|x-a\| \, \|\psi(x-a)\| \leqslant \|y-b\| \, \|df(a)^{-1}\| \frac{\|\psi\|}{1-\|\psi\|}$

et $\|df(a)^{-1}\| \frac{\|\psi(x-a)\|}{1-\|\psi(x-a)\|}$ tend vers zéro si y tend vers b,

ce qui montre la différentiabilité de g au point b. $\square$

Prop 7 <u>Critère de difféomorphisme</u>

Soient E et F deux espaces de Banach, V et W ouverts de E et F respectivement et f homéomorphisme de V sur W. Alors f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur W si et seulement si

(17) $\forall x \in V, \; df(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

<u>Preuve de la proposition 7.</u>

* la condition est nécessaire. Si f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur W, alors $df(x) \in \mathrm{Isom}(E,F)$ pour tout $x \in V$.
* Réciproquement, si (17) a lieu, alors pour tout $x \in V$, la proposition 6 montre que

$g = f^{-1}$ est différentiable en $y = f(x)$ et $dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$.

* La question est maintenant de savoir si g est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire si l'application $dg : W \to \mathcal{L}(F, E)$ est continue. Or $dg(y)$ est la composée de trois applications :

(i) $F \supset W \ni y \longmapsto x = g(y) \in V \subset E$, qui est continue car f est un homéomorphisme

(ii) $E \supset V \ni x \longmapsto df(x) \in \mathrm{Isom}(E, F)$, qui est continue car f est de classe $\mathcal{C}^1$

(iii) $\mathrm{Isom}(E, F) \ni u \longmapsto u^{-1} \in \mathrm{Isom}(F, E)$. Cette application est continue comme il a été établi à la proposition 3. Le résultat est donc établi. $\square$

• Fin de la preuve du théorème d'inversion locale.

On rappelle qu'à l'issue du début de la preuve, on a trouvé V_1 ouvert de E et W_1 ouvert de F tels que f est un homéomorphisme de V_1 sur W_1, avec $a \in V_1$ et $f(a) = b \in W_1$. De plus, $df(a) \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Comme $\mathrm{Isom}(E, F)$ est ouvert (Proposition 3), il existe V voisinage ouvert de a, $a \in V \subset V_1$ tel que $df(x) \in \mathrm{Isom}(E, F)$ pour tout $x \in V$.

Donc f est un homéomorphisme de V sur $W = f(V) \subset W_1$ tel que pour tout $x \in V$, $df(x) \in Isom(E, F)$. En d'autres termes, la relation (17) est satisfaite et la proposition (7) montre que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Ce qui achève la démonstration.

$\square$

(5) Théorème des fonctions implicites.

Th (4) des fonctions implicites.

On se donne trois espaces de Banach E, F et G, U un ouvert de $E \times F$, f une application de U dans G de classe $\mathcal{C}^1$, $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$. De plus, on suppose

(18) $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in Isom(F, G).$$

On se demande quelle est localement autour de (a,b) la structure de l'ensemble des solutions $(x,y) \in U$ de l'équation $f(x,y) = 0$. Le résultat dit qu'il existe V ouvert $\subset U$, voisinage de (a,b), il existe W ouvert $\subset E$, $a \in W$, il existe $g : W \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

(19) $(x,y) \in V,\ f(x,y) = 0$

équivaut à

(20) $x \in W,\ y = g(x)$.

On résout $f(x,y)$ dans V grâce à la relation $y = g(x)$. On a $b = g(a)$.

La preuve du théorème (4) consiste à se ramener au théorème d'inversion locale. Soit $f_1 : U \to E \times G$ définie de la façon suivante
$E\times F \supset U \ni (x,y) \mapsto f_1(x,y) = (x, f(x,y)) \in E \times G$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, f_1 l'est également et

(21) $$df_1(x,y) = \begin{pmatrix} Id_E & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, $df_1(a,b)$ est l'application
$E\times F \ni (h,k) \mapsto (h, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k) \in E \times G$

et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \in Isom(F,G)$ entraîne que $df_1(a,b) \in Isom(E\times F, E\times G)$. En effet, on résout, pour $(p,q) \in E\times G$, l'équation $df_1(a,b)\cdot(h,k) = (p,q)$ de la façon suivante. On a bien sûr $h = p$ (cf (21)), qu'on reporte dans la seconde équation :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k = q - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot p \quad \text{et}$$

$$k = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}\cdot\left[q - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot p\right].$$

Les applications $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ sont linéaires et continues, donc $(df_1(a,b))^{-1}$ est bien une application continue.

* On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à f_1 au point (a,b) : il existe V voisinage ouvert de (a,b) dans $E\times F$, $V \subset U$, il existe W_1 ouvert de $(a,0) \in E\times G$ tel que f_1 est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de V sur W_1. On note $E\times G \supset W_1 \ni (x,z) \mapsto g_1(x,z) \equiv (x, \tilde{g}(x,z)) \in V \subset E\times F$ l'application réciproque. D'où $\tilde{g} : W_1 \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$. Les applications f_1 et g_1 sont réciproques : la condition

(i) $\quad (x,y) \in V, \quad z = f(x,y)$

équivaut à la condition

(ii) $\quad (x,z) \in W_1, \quad y = \tilde{g}(x,z)$

compte tenu de la forme très particulière de l'application f_1.

* Dans le cas particulier où $z=0$ (on rappelle qu'on cherche à résoudre l'équation $f(x,y)=0$) on identifie $x \in E$ à $(x,0) \in E \times F$ et $(x,0) \in W_1$ équivaut à $x \in W_1 \cap E = W$ qui est un ouvert de E comme intersection finie d'ouverts. Si $z=0$, la condition (i) exprime la relation (19)'; elle est équivalente à (ii) qui s'écrit maintenant $x \in W$, $y = \tilde{g}(x,0)$. On pose $g(x) = \tilde{g}(x,0)$ pour $x \in W$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ car c'est le cas de l'application $\tilde{g}$. In fine, la relation (ii) s'écrit maintenant $x \in W$, $y = g(x)$, ce qui constitue exactement la condition (20). Le théorème est démontré. $\square$

Dubois

Paris, 21 novembre 2013.

une coquille corrigée le 15 nov 2019.

D.