le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 11
Théorèmes de Tonelli et de Fubini

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 11
Théorèmes de Tonelli et de Fubini *

Calcul des intégrales doubles

- Motivation
- Théorèmes de Tonelli et de Fubini
- Quelques exemples élémentaires
- Un contre-exemple classique
- Changement de variable
- Calcul de l'intégrale de Gauss

* François Dubois, 2010, édition septembre 2015, 17 pages.

AM I

ch (9) Calcul des intégrales doubles

• Motivation

Le calcul des intégrales simples se ramène traditionnellement à un calcul de fonctions primitives. Mais pour les intégrales multiples, et les intégrales doubles en particulier, rien de tel ne se produit. Ce chapitre détaille comment passer d'un symbole de type $\int_X f d\mu$ au calcul effectif d'un nombre réel.

◦ Rappel : fonctions intégrables

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré quelconque, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction mesurable (relativement à la tribu $\mathcal{T}$) de sorte que $\int_X |f| d\mu < \infty$. On dit qu'alors f est intégrable et on note $f \in L^1(X)$ ou $f \in L^1(\mu)$.

Alors μ-presque partout pour $x \in X$, $f(x)$ est bien un nombre réel, l'intégrale $\int_X f d\mu$ est effectivement un nombre réel et on a

$$(1) \qquad \left| \int_X f d\mu \right| \leqslant \int_X |f| d\mu .$$

* Pour ce chapitre, nous prendrons $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}_1$ la tribu de Borel et $\mu = m_1$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, telle que

(2) $\quad m_1(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \qquad \alpha < \beta$.

Nous utiliserons aussi le cas où $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}_2$, tribu des boréliens à deux dimensions d'espace et $\mu = m_2$, mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

(3) $\quad m_2(]a,b[\times]c,d[) = (b-a)(d-c), \quad a<b, \ c<d$.

(def) <u>Fonction partielle</u>

Soit $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}^2$ une fonction numérique de deux variables réelles. Si on fixe $x \in \mathbb{R}$ (le premier facteur), on obtient une fonction de la variable $y \in \mathbb{R}$ que l'on note f_x :

(4) $\quad \mathbb{R} \ni y \mapsto f_x(y) = f(x,y) \in \mathbb{R} \quad , x \in \mathbb{R}$.

De même si on fixe le second facteur $y \in \mathbb{R}$, on obtient une fonction de $x \in \mathbb{R}$ notée f^y :

(5) $\quad \mathbb{R} \ni x \mapsto f^y(x) = f(x,y) \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$.

Prop (technique)

Si f est une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable pour la tribu $\mathcal{B}_2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est mesurable pour la tribu $\mathcal{B}_1$ comme fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction f^y est $\mathcal{B}_1$ mesurable.

Th <u>Tonelli</u>

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, mesurable pour la tribu $\mathcal{B}_2$ des Boréliens. On pose

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f_x\, dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f^y\, dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Alors φ et ψ sont mesurables $\mathbb{R} \to [0, +\infty[$ pour la tribu $\mathcal{B}_1$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} f\, dm_2$$

- On peut écrire le résultat sous la forme

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}^2} f\, dm_2 = \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} dy\, f(x,y) \right] = \int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x,y) \right],$$

avec (puisque $f \geq 0$) égalité des trois facteurs de la relation (6) à $+\infty$ ou bien égalité comme nombre réel ≥ 0 de ces trois expressions. On peut calculer l'intégrale double d'une fonction $\geqslant 0$ "dans l'ordre que l'on veut". On bien on calcule d'abord l'intégrale en y à x fixé (i.e. ici $\varphi(x)$) puis on intègre la fonction de x ainsi obtenue, ou bien on calcule d'abord $\psi(y)$, intégrale en x à y fixé puis on intègre ensuite cette fonction de y. Le théorème de Tonelli s'applique pour les fonctions $\geqslant 0$; il joue un peu le même rôle que le théorème de convergence monotone.

(th) **Fubini**

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On pose

$$\varphi^*(x) = \int_{\mathbb{R}} |f|_x \, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)| \, dy \geqslant 0$$

Alors la fonction φ^* est mesurable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$. Si la condition $\int_{\mathbb{R}} \varphi^* dx < \infty$ est vérifiée, c'est à dire si

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} dy \, |f(x,y)| \right] < \infty \text{ (est fini)},$$

alors $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, presque partout ($x \in \mathbb{R}$), $f_x \in L^1(\mathbb{R})$, pp ($y \in \mathbb{R}$), $f^y \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\varphi(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy$ est définie presque partout ($x \in \mathbb{R}$), la fonction $\psi(y) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx$ est définie presque partout ($y \in \mathbb{R}$), et on a l'égalité

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} f\,dm_2 = \int_{\mathbb{R}} \psi(y)\,dy .$$

- En pratique, la relation (6) est encore vraie si f est une fonction mesurable, mais uniquement si la condition (7) est vérifiée, i.e. $\int_{\mathbb{R}^2} |f|\,dm_2 < \infty$.

ex1 Surface du <u>triangle unité</u>.

Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, le triangle de référence, ou triangle unité. Soit $f = \chi_T$ la fonction caractéristique de cette figure :

$$(9) \quad \chi_T(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in T \\ 0, & (x,y) \notin T . \end{cases}$$

Cette fonction est positive, le théorème de Tonelli permet de calculer $\int_{\mathbb{R}^2} \chi_T\,dm_2 = m_2(T)$ (la surface du triangle) par une double intégrale simple (voir la figure 1) :

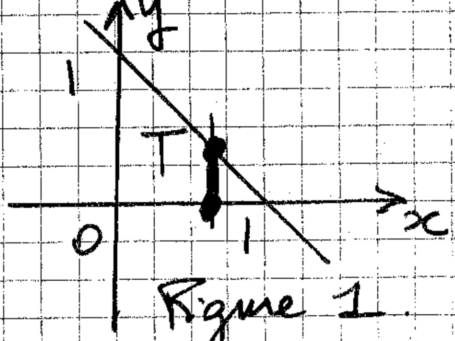


Figure 1

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_T\,dm_2 = \int_0^1 dx \left\{ \int_0^{1-x} dy \right\} = \int_0^1 dx\,(1-x) = \frac{1}{2}$$

ex2 Fonction positive sur le triangle unité.

On pose $f = x\,\chi_T$. Comme $x \geq 0$ sur le triangle T, $f \geq 0$ et

$$\int_T x\, dm_2 = \int_0^1 dx \left(\int_0^{1-x} x\, dy \right) = \int_0^1 x(1-x) = \frac{1}{6}.$$

Mais on a aussi :

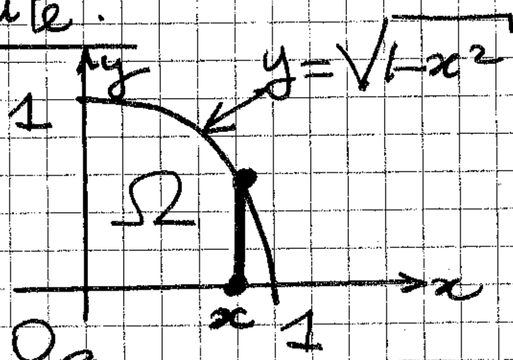
$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} x\,dx = \int_0^1 dy\ \frac{1}{2}(1-y)^2 = \frac{1}{6}$$

et quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les intégrations, le résultat n'a pas changé.

ex3 <u>Aire du quart du disque unité.</u>

$$\int_\Omega dm_2 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$



<u>Figure 2</u>

puis le calcul de cette intégrale demande un simple changement de variable : $x = \cos\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, donc $dx = -\sin\varphi\, d\varphi$, $\sqrt{1-x^2} = \sin\varphi$. D'où

$$|\Omega| = \int_{\pi/2}^0 \sin\varphi(-\sin\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

On s'y attendait !

(ex4) Une autre fonction dans un autre triangle

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 4\}$

Calculer $I = \int_A \frac{dx\,dy}{(x+y)^4}$

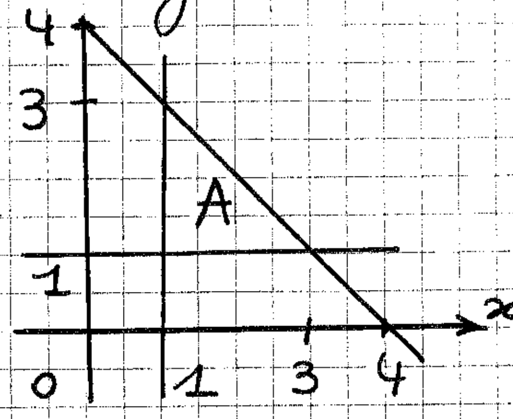


Figure 3.

La fonction à intégrer est positive, donc on calcule dans l'ordre que l'on veut, en prenant garde que si $(x,y) \in A$, alors $1 \leq x \leq 3$, ainsi qu'illustré à la figure 3. On a donc

$$I = \int_1^3 dx \int_1^{4-x} dy \frac{1}{(x+y)^4}$$

$$= \int_1^3 dx \left\{ \left[\frac{1}{3} \frac{-1}{(x+y)^3} \right]_1^{4-x} \right\}$$

$$= \int_1^3 dx \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^3} - \frac{2}{3}\frac{1}{4^3}$$

$$= -\frac{1}{2\times 3}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^3 - \frac{1}{6\times 4\times 4}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\times 4}\right) - \frac{1}{6\times 4\times 4}$$

$$= \frac{1}{4\times 6}\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{48}.$$ ouf!

- Un contre-exemple classique.

Soit (10) $J = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$.

* On effectue un premier calcul, après avoir remarqué que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,(x^2+y^2-2y^2) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

d'où

$$J = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \left[\operatorname{Arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

* Mais on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$ Donc

$$J = \int_0^1 dy \int_0^1 dx\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= -\int_0^1 dy \left(\frac{1}{1+y^2} - 0\right) = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4}$$

* La conclusion est curieuse : $J = \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$!!

Mais avons nous le droit de faire ce double calcul ? Le théorème de Fubini peut-il s'appliquer ? Regardons l'intégrale J^* obtenue en remplaçant l'argument par sa valeur absolue :

$$(11) \quad J^* = \int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\, dx\,dy$$

On peut utiliser le théorème de Tonelli car la fonction à intégrer est positive :

$$J^* = \int_0^1 dx \left[\int_0^1 \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right]$$

$$\text{et } [\ ] = \int_0^x dy\, \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \int_x^1 dy\, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \int_0^x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy - \int_x^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{x}{2x^2} - 0\right) - \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}.$$

On a ensuite $\int_0^1 dx \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x^2}\right) = +\infty$!

Donc $J^* = +\infty$ et l'intégrale introduite à la relation (10) <u>n'a pas de sens</u> dans la théorie de Lebesgue. Ce n'est <u>pas</u> un nombre réel mais une expression formelle qui n'a pas d'utilisation pratique.

• **Changement de variable.**

(Th) Soit Q le carré $]0,1[\times]0,1[$, Φ une application différentiable :

$$(12) \quad Q \ni (x,y) \mapsto (X,Y) = \phi(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

qu'on suppose bijective, avec $\phi^{-1} : \phi(Q) \to Q$ supposée continue. On note $d\Phi(x,y)$ la différentielle de ϕ au point (x,y). Alors

$$(13) \quad \int_{\phi(Q)} f(X,Y)\, dX dY = \int_Q f(\phi(x,y))\, |\det d\phi(x,y)|\, dx dy.$$

• Nous n'allons pas démontrer la relation (13) (qui demande beaucoup de technique mathématique précise qui dépasse le cadre de ce cours) mais nous allons en donner une explication. En particulier le Jacobien $J(x,y)$,

$$J(x,y) \equiv |\det d\phi(x,y)|$$

valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne $d\phi(x,y)$

constitue un facteur particulièrement non intuitif.

* Nous commençons par étudier une transformation linéaire du plan $\mathbb{R}^2$

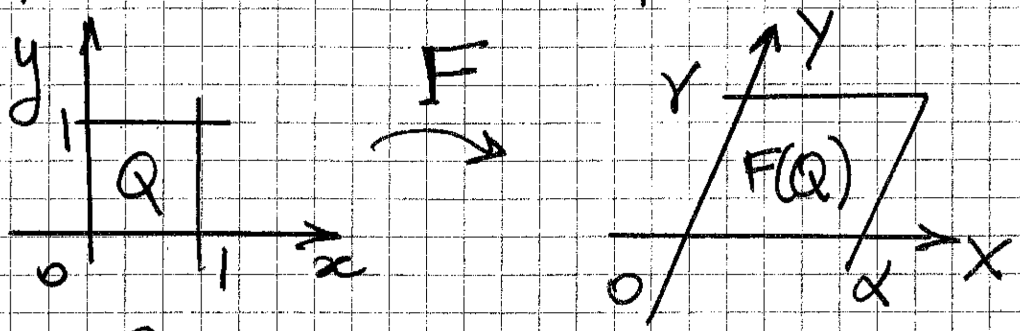


Figure 4.

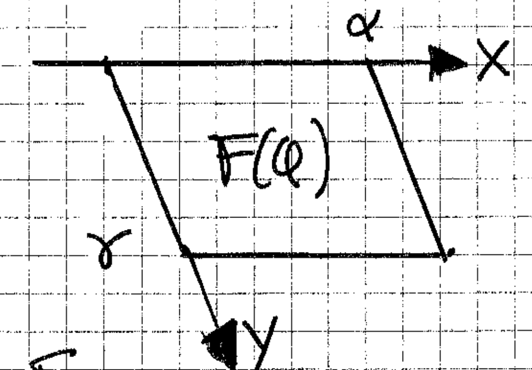
Si (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on pose $F \cdot e_1 = \alpha e_1$, $F \cdot e_2 = \beta e_1 + \gamma e_2$, avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$ pour fixer les idées. Alors F est représenté dans cette base canonique par la matrice M suivante :

$$(14) \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

L'image par F du quadrilatère Q (qui est d'ailleurs un carré !) est le quadrilatère $F(Q) = \{(X,Y),\ X = \alpha x + \beta y,\ Y = \gamma y,\ 0 \leq x,\ y \leq 1\}$ illustré à la figure 4. En particulier, $F(0,0) = (0,0)$, $F(1,0) = (\alpha, 0)$, $F(1,1) = (\alpha+\beta, \gamma)$, $F(0,1) = (\beta, \gamma)$. L'aire du quadrilatère $F(Q)$ vaut la base α multipliée par la hauteur γ, donc

$$(15) \qquad \int_{F(Q)} dX\, dY = \alpha\gamma = |F(Q)|.$$

* Si on change le signe de γ (Figures 5), le repère (X,Y) n'a plus la même orientation que le repère (x,y). L'aire du parallélogramme $F(Q)$ vaut maintenant $\alpha|\gamma|$. Or on a (cf (14)) : $\det M = \alpha\gamma$, ce qui montre que dans tous les cas



Figures 5

$$(15) \quad \int_{F(Q)} dX\,dY = |\det M|, \quad Q =]0,1[\times]0,1[.$$

* Pour aborder le cas général,

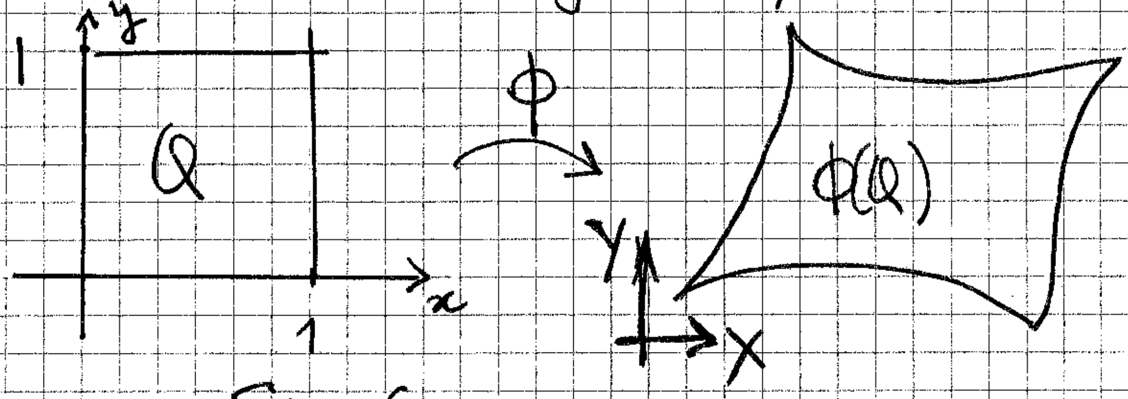


Figure 6

l'application régulière Φ transforme le carré unité Q en un domaine à frontière courbe qui reste topologiquement équivalent à un carré. Nous découpons $[0,1]$ en N_x morceaux de taille $\Delta x = \frac{1}{N_x}$ et N_y morceaux de taille $\Delta y = \frac{1}{N_y}$. Nous posons $x_{ij} = (i\Delta x, j\Delta y)$
pour $0 \leq i \leq N_x$ et $0 \leq j \leq N_y$

et nous notons X_{ij} l'image par Φ de ce point de Q (voir la figure 7)

$$X_{ij} = \phi(i\Delta x, j\Delta y), \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y$$

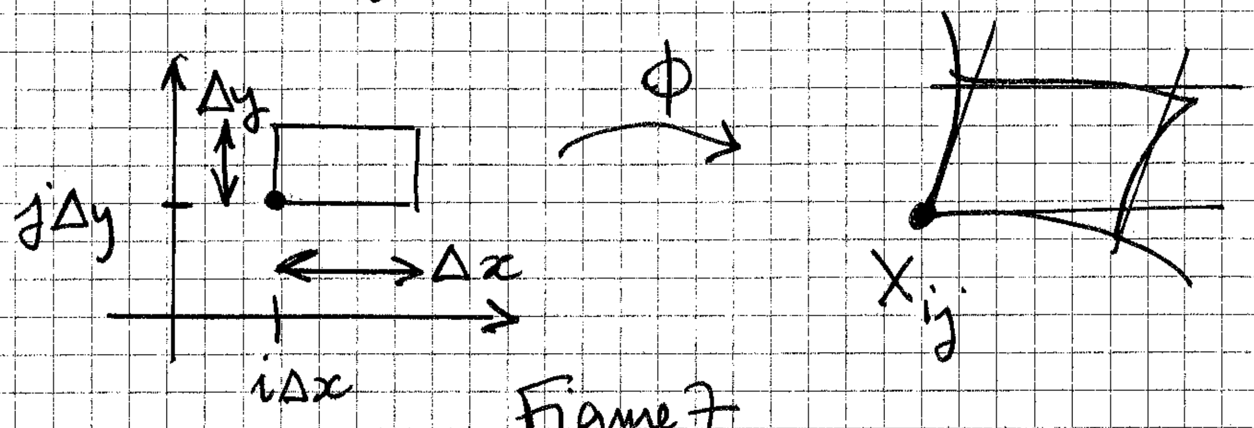


Figure 7

le quadrangle $Q_{i+1/2,\, j+1/2} =]i\Delta x, (i+1)\Delta x[\times]j\Delta y, (j+1)\Delta y[$ se transforme par ϕ en un quadrangle curviligne $\phi(Q_{i+1/2, j+1/2})$. On a donc par sommation

$$(17) \quad \int_{\phi(Q)} f(X,Y)\, dX\, dY = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \int_{\phi(Q_{i+1/2,\, j+1/2})} f(X,Y)\, dX\, dY .$$

* Mais pour N_x, N_y assez grand, le quadrangle $\phi(Q_{i+1/2, j+1/2})$ est "petit", nous approchons $(X,Y) = \phi(x,y)$, $(x,y) \in Q_{i+1/2, j+1/2}$ par son approximation linéaire:

$$(18) \quad (X,Y) = X_{ij} + d\phi(x_{ij}) \bullet \big((x,y) - x_{ij}\big) + \text{ordre supérieur} .$$

Puis nous remplaçons ce domaine (courbe) $\phi(Q_{i+1/2, j+1/2})$ par le quadrilatère plan obtenu à l'aide de la relation (18)

$$(19) \quad (X,Y) \simeq X_{ij} + d\phi(x_{ij})\cdot(\xi\Delta x, \eta\Delta y), \quad \begin{matrix} 0\leq\xi\leq 1 \\ 0\leq\eta\leq 1 \end{matrix}$$

au $Q_{i+1/2,\,j+1/2}$ est paramétré par Q lui-même, grâce à Δx et Δy (petits). Nous avons donc :

$$\int_{\phi(Q_{i+1/2,\,j+1/2})} f(X,Y)\,dX\,dY \simeq \int_{\substack{X_{ij}+d\phi(x_{ij})\cdot(\xi\Delta x,\eta\Delta y) \\ 0\leq\xi,\eta\leq 1}} f(X,Y)\,dX\,dY$$

puis nous approchons l'intégrale par une méthode des rectangles, qui revient à remplacer $f(X,Y)$ par $f(X_{ij})$:

$$(20) \quad \int_{\phi(Q_{i+1/2,\,j+1/2})} f(X,Y)\,dX\,dY \simeq f(X_{ij}) \int_{\substack{X_{ij}+d\phi(x_{ij})\cdot(\xi\Delta x,\eta\Delta y) \\ 0\leq\xi,\eta\leq 1}} dX\,dY$$

et il ne reste plus qu'à calculer la surface du (petit) parallélogramme issu de Q par la transformation linéaire $d\phi(x_{ij})$. Compte tenu de (16), il vient

$$(21) \quad \int_{\substack{X_{ij}+d\phi(x_{ij})\cdot(\xi\Delta x,\eta\Delta y) \\ 0\leq\xi,\eta\leq 1}} dX\,dY = |\det d\phi(x_{ij})|\,\Delta x\,\Delta y$$

avec une égalité cette fois !

Nous pouvons terminer ce calcul approché ; compte tenu de (17), (20) et (21) :

$$\int_{\phi(Q)} f(x,y)\,dx\,dy \simeq \sum_{i=0}^{N_x-1}\sum_{j=0}^{N_y-1} f(\phi(x_{ij}))\,|\det d\phi(x_{ij})|\,\Delta x\,\Delta y$$

expression qui tend vers $\int_Q f(\phi(x,y))\,|\det d\phi(x,y)|\,dx\,dy$

si $N_x \to \infty$, $N_y \to \infty$ i.e. $\Delta x, \Delta y \to 0$. On fait donc apparaître le membre de droite de la relation (13), ce qui "explique" cette relation, que nous admettons finalement ici ! $\square$

- <u>Cas des coordonnées polaires planes</u>

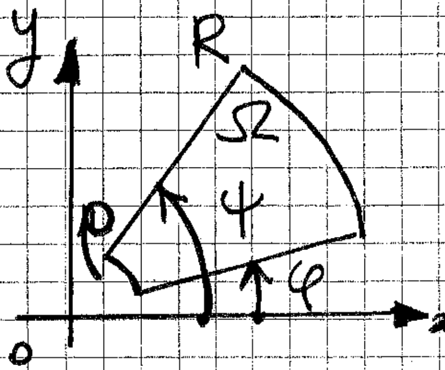


Figure 8

On s'intéresse au domaine curviligne décrit à la figure 8 ci-contre.

On se donne $0 \leqslant \varphi < \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 < \rho < R$ et le point $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est soumis aux conditions suivantes

$$\rho \leqslant r \leqslant R, \quad \varphi \leqslant \theta \leqslant \psi$$

faciles à écrire dans ces coordonnées polaires.

Soit à calculer $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$.

On introduit ϕ qui permet de passer de (r,θ) à (x,y) :

$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors

$$d\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta) \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de cette transformation des coordonnées. On a sans difficulté

$$d\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

D'où $J(r,\theta) \equiv |\det d\phi(r,\theta)| = r \geqslant 0$.

Donc $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\varphi^\psi d\theta \int_\rho^R dr\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) \cdot r$

sans oublier le jacobien pointé par une flèche !

(22) $$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\substack{\rho \leqslant r \leqslant R \\ \varphi \leqslant \theta \leqslant \psi}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

- Exemple classique : intégrale de Gauss.

On cherche à calculer

(23) $$G \equiv \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Cette intégrale est bien convergente car $x^2 \geqslant x$ si $x \geqslant 1$. Qui entraîne $\exp(-x^2) \leqslant \exp(-x)$ si $x \geqslant 1$, et l'intégrale associée est clairement convergente, i.e. définit un nombre réel. De plus, $G \geqslant 0$.

* L'idée (non naturelle) consiste à introduire l'intégrale double

$$I = \int_{[0,\infty[\times[0,\infty[} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy .$$

Comme c'est l'intégrale d'une fonction positive, le théorème de Tonelli nous permet d'intégrer dans l'ordre que l'on veut. Nous avons donc

$$I = \int_0^\infty dx \left[\int_0^\infty dy\, e^{-x^2} e^{-y^2} \right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \left[\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right] = G^2 .$$

* On peut aussi utiliser la relation (22) et "passer en coordonnées polaires". Il vient

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \; r e^{-r^2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \qquad \text{par Fubini}$$

or $\int_0^\infty r e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} d(r^2) = \frac{1}{2}$.

D'où $I = \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

* On rapproche ce résultat du précédent : $G^2 = \frac{\pi}{4}$, $G \geq 0$ donc $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Nous pouvons retenir que l'on a

$$(24) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

Dubois
7 janvier 2010.

Quelques coquilles corrigées le 5 juin 2011.