Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 10

Convergence dominée

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 10

Convergence dominée *

- Rappels
- Classes de fonctions égales presque partout
- Nouvel énoncé du théorème de convergence dominée
- Deux extensions du théorème de convergence dominée

---

* François Dubois, 2009, édition septembre 2015, 14 pages.

AMI

ch 8

Convergence dominée

- **Rappels**

On rappelle l'énoncé du théorème de convergence dominée, introduit à la leçon précédente.

Soit $(X, \mathcal{C}, \mu)$ un ensemble mesuré, i.e. muni d'une tribu $\mathcal{C}$ et d'une mesure positive sur l'ensemble mesurable $(X, \mathcal{C})$. Soit g une fonction mesurable positive telle que $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$(1) \qquad \int_X g \, d\mu < \infty .$$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{R}$ qui converge simplement vers f : $\forall x \in X$, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ si $n \to \infty$ et telle qu'on ait la relation de domination :

$$(2) \qquad |f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors f est mesurable, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\int_X |f - f_n| \, d\mu$ tend vers 0 si $n \to \infty$ et

$$(3) \qquad \int_X f_n \, d\mu \longrightarrow \int_X f \, d\mu .$$

Le théorème de convergence dominée permet en pratique d'échanger les symboles $\int_X d\mu$ et $\lim_{n\to\infty}$. Mais l'hypothèse de domination par une fonction intégrable (cf (1)(2)) est essentielle pour autoriser cet échange.

(ex) Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{-nx} \frac{\sin x}{x}$ si $n \geq 1$ et $x \geq 0$. Comme $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$ si $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq e^{-nx} \leq e^{-x}$ si $n \geq 1$ et si on pose $g(x) = e^{-x}$, il est clair qu'elle satisfait aux conditions (1) et (2) du théorème de convergence dominée. Si $n \to \infty$, $f_n(x) \to 0$ si $x > 0$ et vers 1 si $x = 0$ car $f_n(0) = 1$ pour tout n. Donc $\int_0^\infty e^{-nx} \frac{\sin x}{x} dx \to 0$ si $n \to +\infty$.

(ex) plus simple. Soit $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Il est clair que $f_n(x) \to 0$ si $0 \leq x < 1$ et $f_n(x) = 1$ si $x = 1$, donc $f_n(1) \to 1$. La limite simple f est telle que $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Elle est discontinue, ce qui illustre à nouveau que la limite simple d'une famille de fonctions continues peut ne pas être continue. De plus $|f_n(x)| \leq 1$, intégrable sur $[0,1]$ et le théorème de convergence dominée confirme bien que $\int_0^1 x^n dx$ tend vers 0 si n tend vers l'infini.

- Rappelons que $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, fonction caractéristique des rationnels, est d'intégrale nulle dans la théorie de Lebesgue. Du point de vue de l'intégration cette ~~fonction~~ est très analogue à la fonction nulle. Il en est de même pour les limites vues dans les deux exemples précédents : même si la fonction limite est non nulle en un point, elle est nulle "presque partout", et c'est cela qui est important.

- <u>Classes de fonctions égales presque partout.</u>

Soit $(X, \mathcal{C}, \mu)$ un ensemble mesuré, f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des $x \in X$ où f et g diffèrent est de mesure nulle, c'est à dire

(4) $\mu(\{x \in X, f(x) \neq g(x)\}) = 0$,

on dit que $f(x) = g(x)$ μ-presque partout, ce qui signifie $f = g$ pour tout ce qui concerne l'intégration.

(def) <u>Equivalence</u>.

Avec le contexte $(X, \mathcal{C}, \mu)$ précédent, f, g deux applications $X \to \mathbb{R}$, on dit que f équivaut à g et on note $f \sim g$ si et seulement si (4) a lieu.

- La classe d'équivalence $\tilde{f}$ de la fonction

f mesurable $X \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions g mesurables $X \to \mathbb{R}$ telles que $f \sim g$, c'est à dire $f(x) = g(x)$ μ-presque partout.

- On se convainc facilement que si $g \in \tilde{f}$ est telle que $\int_X |g| d\mu < \infty$, alors $\int_X \tilde{f} d\mu$ a un sens ; c'est un nombre réel qui ne dépend pas du représentant g choisi dans la classe $\tilde{f}$. On note alors $\tilde{f} \in L^1(\mu)$.
- Dans la suite, on néglige de distinguer une fonction $X \to \mathbb{R}$ et sa classe $\tilde{f}$. En théorie de Lebesgue, les objets naturels sont effectivement des <u>fonctions</u> $X \to \mathbb{R}$ <u>définies presque partout</u> au sens de la mesure μ, et non les applications $X \to \mathbb{R}$. Nous retenons qu'en théorie de l'intégration (au sens de Lebesgue), $f(x)$ a un sens "presque partout" relativement à la mesure de référence, ce qui signifie que $\mu(\{x \in X,\ f(x) \text{ non défini}\}) = 0$.
- On peut compléter la tribu $\mathcal{C}$ pour rendre mesurables deux parties A, B de $\mathcal{C}$ telles que $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. De façon plus précise, on a le résultat suivant.

(Th) Tribu et mesures complétés.

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré ; on pose

$$(5) \begin{cases} \mathcal{T}^* = \{A \subset X, \exists A_-, A_+ \in \mathcal{T}, A_- \subset A \subset A_+, \\ \qquad \mu(A_+ \setminus A_-) = 0\} \end{cases}$$

et $\mu^*(A) = \mu(A_+) = \mu(A_-)$ si $A \in \mathcal{T}^*$.

Alors $\mathcal{T}^*$ est une tribu sur l'ensemble X et μ^* est une mesure définie sur la tribu $\mathcal{T}^*$.

• Nouvel énoncé du théorème de convergence dominée.

(Th) Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un ensemble mesuré, $f_n : X \to \mathbb{R}$ mesurable telle que

$$(6) \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Alors l'expression

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

définit un nombre réel $f(x)$ μ-presque partout, $f \in L^1(\mu)$ et

$$(8) \qquad \int_X f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu.$$

- La preuve de ce résultat consiste à éliminer l'ensemble de mesure nulle où l'on ne peut rien dire et à se ramener sur son complémentaire au théorème de convergence dominée rappelé en début de chapitre.

Soit $S_n = \{x \in X, f_n(x) \text{ défini}\}$. Alors $\mu(S_n^c) = 0$; on pose

(9) $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)|$

pour $x \in S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$; alors $S^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^c$, $\mu(S^c) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n^c) = 0$ et $\mu(S^c) = 0$, donc φ défini par la relation (9) est un nombre réel si $x \in S$. De plus, le théorème de convergence monotone entraîne que

(10) $\int_S \varphi \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_S |f_n| \, d\mu \quad < \infty$

par hypothèse

- Soit $A = \{x \in X, \varphi(x) < \infty\}$. Alors $\mu(A^c) = 0$ sinon on établit facilement une contradiction avec la relation (10) : $\int \varphi \, d\mu \geq k \, \mu(\{\varphi \geq k\}) \geq k \, \mu(A^c)$ qui tend vers $+\infty$ si $\mu(A^c) \neq 0$, ce qui contredit la relation (10).

Si $x \in A$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est donc absolument convergente et la fonction f définie par (7) a un sens pour $x \in A$. De plus $|f(x)| \leq \varphi(x)$ pour $x \in A$.

- Par ailleurs, soit $g_n(x) = \sum_{k\leq n} f_k(x)$, bien défini pour $x \in A$. Alors $|g_n(x)| \leq \varphi(x)$ pour $x \in A$ et $g_n(x)$ converge simplement vers $f(x)$ dans les mêmes conditions. Grâce au théorème de convergence dominée rappelé en début de chapitre, $\int_A g_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu$, ce qui établit la relation (8) et établit la propriété. □

- On remarque que la conclusion du théorème nous donne $\sum_{k\leq n} f_k(x)$ converge μ-presque partout. En général, on n'a pas mieux et la notion de "convergence presque partout" est donc la bonne !

- Deux extensions du théorème de convergence dominée.

(Th) Continuité.

Soit $(X, \mathcal{G}, \mu)$ un ensemble mesuré, $X \times \mathbb{R} \ni (x, y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ une fonction mesurable sur $X \times \mathbb{R}$ muni de la mesure produit de μ et de la mesure de

Lebesgue m_1 telle que

(11) $\forall y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ intégrable

(12) $pp(x) \in X$, $y \mapsto f(x,y)$ est continue en y_0

(13) $\begin{cases} \exists g \geq 0 \text{ intégrable } X \to \mathbb{R}_+ \quad (\int_X g\, d\mu < \infty), \\ \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(x,y)| \leq g(x) \quad pp(x \in X) \end{cases}$.

Soit $\phi(y)$ défini par

(14) $$\phi(y) = \int_X f(x,y)\, d\mu(x).$$

Alors ϕ est continue au point $y_0 \in \mathbb{R}$.

- L'extension à $X \times W \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ où W est un voisinage de $y_0 \in \mathbb{R}^m$ est immédiate. Nous renvoyons pour un énoncé très précis par exemple au livre de Dieudonné, Éléments d'Analyse (tome 2, page 123).

(Th) <u>Dérivabilité sous le signe "somme"</u>.

Avec les hypothèses faites au théorème précédent, on suppose de plus

(15) $pp(x \in X)$, $y \mapsto f(x,y)$ dérivable, $\frac{\partial f}{\partial y}$ définie

(16) $\begin{cases} \exists g_1 : X \to \mathbb{R}_+, \int_X g_1\, d\mu < \infty, \forall y \in \mathbb{R}, \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq g_1(x) \quad pp\,(x \in X) \end{cases}$.

Alors la fonction ϕ définie par l'intégrale (14) est dérivable et on a :

(17) $$\frac{d\phi}{dy} = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$$

o Cette version du théorème de convergence dominée permet effectivement d'échanger les symboles $\frac{d}{dy}$ et $\int_X d\mu(x)$. En effet, compte tenu de (14), la conclusion (17) peut aussi s'écrire

(18) $$\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\, d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, d\mu(x).$$

(ex1) Cas d'une <u>série entière</u>.

On prend $X = \{1,2,\dots\} = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N}\setminus\{0\})$, μ = mesure de comptage et $f_k(y) = \frac{1}{k} y^k$ si $k \geq 1$. Si $|y| \leq \theta < 1$, on a

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial y}\right| = |y^{k-1}| \leq \theta^{k-1}$$

et $k \mapsto \theta^{k-1}$ est "intégrable pour la mesure de comptage" puisque c'est le terme général d'une série géométrique convergente si $0 \leq \theta < 1$.

On passe donc l'hypothèse cruciale (16) [les autres hypothèses (11)(12)(13)(15) sont laissées au lecteur !] qui permet d'avoir le droit de "dériver sous le signe somme", qui s'écrit ici avec une simple sommation $\sum_{n\geq 1}$.

On pose $\phi(y) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} y^k$ et la série dérivée (formelle !) $\frac{d\phi}{dy} = \sum_{k\geq 1} y^{k-1}$ peut être d'une part calculée à l'aide de la convergence dominée et d'autre part directement puisque $\sum_{k\geq 1} y^{k-1} = \frac{1}{1-y}$. Donc $\phi(y) = -\log(1-y)$ car $\phi(0)=0$, ce qui annule la constante d'intégration. Changeant y en $-y$, nous venons de montrer que l'on a

$$(19) \qquad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \cdots \quad , \; |y|<1.$$

- Nous constatons que le point clef (hypothèse (16)) est de vérifier que la <u>série dérivée est effectivement dominée</u>.

(ex 2) "pas si facile".

Nous reprenons l'exemple vu au début de ce chapitre, à une variante près. Pour $\alpha\geq 0$, on pose

$$(20) \qquad \phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Si $\alpha\geq\beta>0$, le théorème de comparaison :

$e^{-\alpha x}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-\beta x}$, $x\geq 0$, montre que $\phi(\alpha)$ est bien défini puisque $\int_0^\infty e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} < \infty$.

* Si $\alpha=0$, $\phi(0)=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ définit une intégrale <u>semi-convergente</u>. Montrons d'abord que

$$(21) \qquad \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty .$$

Posons $v_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| \frac{dx}{|x|}$. D'après le théorème de convergence monotone, on a clairement $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k\geq 0} v_k$. Or

$$v_k = \int_0^\pi |\sin\theta| \frac{d\theta}{|\theta+k\pi|} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

on a <u>minoré</u> v_k par le terme général d'une série <u>divergente</u> (la série harmonique !), ce qui montre que $\sum_{k\geq 1} v_k = +\infty$ et établit (21).

* Si on pose (pour simplifier ici !) $\phi(0) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$, montrer que $\phi(0)$ est bien défini revient à étudier la convergence de la série de terme général

$$(22) \qquad u_k = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx .$$

Cette série est maintenant <u>absolument convergente</u>. On remarque que $\frac{\sin x}{x}$ a le signe de $\sin x$, donc est positif pour $0 \leq x-2k\pi \leq \pi$ et négatif pour $0 \leq x-(2k+1)\pi \leq \pi$. D'où

$$|u_k| = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta+2k\pi}\,d\theta - \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\theta+(2k+1)\pi}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi}{(2k\pi+\theta)((2k+1)\pi+\theta)} \sin\theta\, d\theta$$

$$\leqslant \frac{\pi}{(2k+1)\pi\,(2k)\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{(2k+1)(2k)\,\pi}$$

et on a majoré $|u_k|$ par le terme général d'une série convergente.

* La fonction $]0,+\infty[\ni \alpha \mapsto \phi(\alpha) \in \mathbb{R}$ est dérivable. On applique le théorème de convergence dominée. Pour $\alpha \geqslant \beta > 0$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right)\right| = \left|-e^{-\alpha x}\sin x\right| \leqslant e^{-\beta x},$$

et la dérivée par rapport à la seconde variable est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable par rapport à la première variable. On a donc $\frac{d\phi}{d\alpha} = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx$ et cette intégrale se calcule sans difficulté si $\alpha > 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{\alpha-i} - \frac{1}{\alpha+i}\right) = \frac{2i}{2i(\alpha^2+1)} = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Donc $\frac{d\phi}{d\alpha} = -\frac{1}{1+\alpha^2}$ s'intègre sans difficulté entre $\alpha > 0$ et $\theta > \alpha$: $\phi(\alpha) - \phi(\theta) = \mathrm{Arctg}\,\theta - \mathrm{Arctg}\,\alpha$

Si $\theta \to +\infty$, la limite étudiée page 2 de ce chapitre montre que $\phi(\theta) \to 0$ si $\theta \to +\infty$. On en déduit $\phi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,\alpha$ si $\alpha > 0$.

* Pour calculer $\phi(0)$, il faut encore montrer directement que ϕ est continue en $\alpha = 0$. Démonstration directe car a priori le théorème de convergence dominée (dans sa version "continue") ne s'applique pas ici autour de l'intégrale "semi-convergente" $\phi(0)$. Mais on a toutefois

$$\phi(\alpha) - \phi(0) = \int_0^{\infty} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= \sum_{k \geq 0} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) \frac{\sin x}{x}\, dx$$

D'où $u_k(\alpha) = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left(e^{-\alpha x} - 1\right) \frac{\sin x}{x}\, dx$

qui définit une série absolument convergente ;

$$|u_k(\alpha)| = \int_0^{\pi} \left(e^{-\alpha(2k\pi+\theta)} - 1\right) \frac{\sin\theta}{2k\pi+\theta}\, d\theta$$

$$- \int_0^{\pi} \left(e^{-\alpha((2k+1)\pi+\theta)} - 1\right) \frac{\sin\theta}{(2k+1)\pi+\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \; d\theta}{(2k\pi+\theta)((2k+1)\pi+\theta)} \Big[\left(1 - e^{-2k\pi\alpha} e^{-\alpha\theta}\right)\left((2k+1)\pi+\theta\right)$$

$$- \left(1 - e^{-(2k+1)\pi\alpha} e^{-\alpha\theta}\right)(2k\pi+\theta)\Big]$$

$$[\;] = \pi + e^{-2k\pi\alpha} e^{-\alpha\theta} \left(e^{-\alpha\pi}(2k\pi+\theta) - ((2k+1)\pi+\theta)\right)$$

$$\leq \pi + e^{-2k\pi\alpha} e^{-\alpha\theta} \left(2k\pi + \theta - (2k+1)\pi - \theta \right)$$

$$\leq \pi \left(1 - e^{-\alpha\theta} e^{-2k\pi\alpha} \right)$$

par ailleurs $[\ ] \geq 0$ si k assez grand. Alors

$$|u_k(\alpha)| \leq \frac{1}{2k(2k+1)\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - e^{-\alpha\theta} e^{-2k\pi\alpha} \right) \sin\theta \, d\theta$$

* On peut à nouveau appliquer le théorème de convergence dominée. On a d'une part

$$|u_k(\alpha)| \leq \frac{2}{2k(2k+1)\pi}$$

terme général d'une série convergente et d'autre part si $\alpha \to 0$, l'intégrale qui majore $u_k(\alpha)$ tend vers 0 si $\alpha \to 0$, là encore par convergence dominée :

$$\left| \left(1 - e^{-\alpha\theta} e^{-2k\pi\alpha} \right) \sin\theta \right| \leq 1 \text{ sur } [0, \pi]$$

$$1 - e^{-\alpha\theta} e^{-2k\pi\alpha} \to 0 \text{ si } \alpha \to 0.$$

Donc $\sum_{k \geq 1} u_k(\alpha)$ converge vers $\sum_{k \geq 1} 0$ si $\alpha \to 0$, ce qui montre la continuité de ϕ en 0. On en déduit alors

(23) $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dubois
21 décembre 2009.

quelques coquilles corrigées
05 juin 2011.