le cnam

# Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

## Cours 04

## Compacité

François Dubois

le cnam

# Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

## Cours 4

## Compacité *

- Théorème de Bolzano-Weierstrass
- Compacts
- Les compacts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$
- Fonctions continues sur les compacts

* François Dubois, 2013, édition septembre 2015, 16 pages.

AMI (4) 

# Compacité.

## (1) Théorème de Bolzano-Weierstrass.

- On s'intéresse ici aux suites qui "convergent presque", en ce sens qu'elles ont au moins une "valeur d'adhérence". Il suffit de se rappeler la suite géométrique de raison $(-1)$ dans $\mathbb{R}$ : $u_k = (-1)^k$. Elle vaut identiquement $+1$ si $k$ est pair et $-1$ si $k$ est impair ; elle a deux valeurs d'adhérence : $+1$ et $-1$... et elle ne converge pas ! Mais on peut considérer la "sous-suite extraite" $v_k = u_{2k}$, qui elle vaut identiquement $+1$, donc converge vers $+1$ et de façon analogue la sous-suite $w_k = u_{2k+1}$ correspondant aux indices impairs.

### (déf) Valeur d'adhérence.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$, espace métrique. On dit que $a \in E$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

(1) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(a, u_n) < \varepsilon$.

(def) Sous-suite extraite.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection strictement croissante : $\varphi(k+1) > \varphi(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $E$, la suite

(2) $$u'_k = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

est dite extraite de la suite $u_k$ grâce à l'injection $\varphi$.

- on a par exemple $\varphi(k) = 2k$ ou $\varphi(k) = 2k+1$ pour les suites extraites de la suite géométrique $u_k = (-1)^k$.

(Prop) (1) Suite extraite et valeur d'adhérence.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite de l'espace métrique $(E, d)$. Si $\alpha$ est valeur d'adhérence de la suite, on peut trouver une sous suite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha$. Et réciproquement : si il existe une sous suite $u'_k$ qui converge vers $\alpha$, alors c'est une valeur d'adhérence de la suite initiale.

# Preuve de la proposition (1)

- On suppose que $\alpha$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En prenant $\varepsilon = 1$ dans (1), il existe $n \geq 0$ de sorte que $d(\alpha, u_n) \leq 1$. Nous notons $\varphi(1)$ cet entier $n$. De façon analogue, avec $\varepsilon = 1/2$ et $N = \varphi(1)+1$, il existe $n > \varphi(1)$ tel que $d(\alpha, u_n) \leq 1/2$. Nous notons $\varphi(2) > \varphi(1)$ un tel entier. Et on poursuit le processus. Si à l'étape $k$ on connaît $k$ nombres entiers de sorte que $\varphi(k) > \varphi(k-1) > \dots > \varphi(2) > \varphi(1)$, et $d(\alpha, u_{\varphi(l)}) \leq 1/l$ si $1 \leq l \leq k$, on sait grâce à (1) qu'il existe $n \geq \varphi(k)+1$ de sorte que $d(\alpha, u_n) \leq \frac{1}{k+1}$ ; on note $\varphi(k+1)$ un tel entier. On construit ainsi une injection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est telle que $\forall k \geq 1$, $d(\alpha, u_{\varphi(k)}) \leq \frac{1}{k}$. La suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.
- Réciproquement si on dispose de $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha$, avec $\varphi(k) \geq k$ obtenu avec une injection strictement croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on peut chercher, pour $\varepsilon > 0$ donné et $N \in \mathbb{N}$ fixé, un entier $n \geq N$ de sorte que $d(\alpha, u_n) < \varepsilon$. Comme $u_{\varphi(k)} \to \alpha$ si $k \to \infty$, il existe $K \in \mathbb{N}$

tel que $\forall k \geq K$, $d(\alpha, u_{\varphi(k)})$ a lieu. Considérons un entier $n$ de sorte que $n \geq N$ et $n$ de la forme $n = \varphi(k)$ avec $k \geq K$ (ce qui est possible car $\varphi(k) \nearrow +\infty$ si $k \nearrow \infty$). Alors $d(\alpha, u_n) = d(\alpha, u_{\varphi(k)}) \leq \varepsilon$ puisque $k \geq K$. Donc $\alpha$ est valeur d'adhérence de la suite initiale. $\square$

**Th (1) Balzano, Weierstraß.**

Soient $a<b$ deux nombres réels, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite incluse dans $[a,b]$ : $u_k \in [a,b]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
**Alors** la suite $u_k$ a au moins une valeur d'adhérence ; on peut extraire de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans $[a,b]$.

## Preuve du théorème (1).

* La preuve consiste à utiliser une méthode de dichotomie : couper en deux l'intervalle $[a,b]$, et recommencer.

* On pose $c = \frac{a+b}{2}$, on dispose d'un ensemble infini d'indices $k \in \mathbb{N}$ de sorte que $u_k \in [a,c]$ ou de sorte que $u_k \in [c,b]$, éventuellement les deux... ce qui est certain

est qu'on a au moins un ensemble infini d'entiers $k$ de sorte que $u_k \in [a_1, b_1]$ avec $a_1 = a$, $b_1 = c$ dans le premier cas, $a_1 = c$, $b_1 = b$ dans le second cas. On fabrique de cette façon une suite extraite $u_k^1$ de sorte que $u_k^1 \in [a_1, b_1]$.

* De proche en proche, en itérant le raisonnement fait ci-dessus, on construit une double suite $a_k$ croissante et $b_k$ décroissante de sorte que

(3) $a \equiv a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k < b_k \leq b_{k-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0 \equiv b$

et $b_k - a_k = (b-a)/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. De plus, on construit une suite extraite $(u_\ell^k)_{\ell \in \mathbb{N}}$ de sorte que

(4) $\forall \ell \in \mathbb{N}, \quad u_\ell^k \in [a_k, b_k]$.

* La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée (par $b$) et la suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée (par $a$). Donc ces deux suites convergent. Vers la même limite $\ell$ car $b_k - a_k$ tend vers zéro si $k \to \infty$. De plus, au vu de (4), $a_k \leq u_k^k \leq b_k$, ce qui montre que $u_k^k \to \ell$ si $k \to \infty$; la suite extraite "diagonale" $u_k^k$ converge vers une valeur d'adhérence de la suite initiale. $\square$

## ② Compacts

**déf** Partie compacte d'un espace métrique.

Soit $(E,d)$ un espace métrique, $K \neq \emptyset$ une partie de $E$. On dit que $K$ est compact si et seulement si de tout recouvrement ouvert $(\omega_j)_{j\in J}$ de $K$ [ie $\omega_j$ ouvert $\subset E$ $\forall j \in J$ et $K \subset \bigcup_{j\in J} \omega_j$], on peut extraire un recouvrement ouvert fini :
$\exists N \in \mathbb{N}$, $j_k \in J$, $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \omega_{j_k}$.

**Prop ②** Toute suite d'un compact a au moins une valeur d'adhérence dans le compact.

Preuve de la proposition ②

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$, $K$ compact $\subset E$. On suppose qu'elle n'a pas de valeur d'adhérence dans $K$. On nie la relation (1) pour tout élément de $K$ :

$\forall \alpha \in K, \exists \varepsilon_\alpha > 0, \exists N_\alpha \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\alpha, d(\alpha, x_n) \geq \varepsilon_\alpha$

On a donc $K \subset \bigcup_{\alpha\in K} B(\alpha, \varepsilon_\alpha)$ qui constitue un recouvrement ouvert de $K$ dont on extrait

un recouvrement fini : $K \subset \bigcup_{1\leq j\leq N} B(\alpha_j, \varepsilon_{\alpha_j})$.
Soit $\varepsilon>0$ tel que
$\varepsilon < \inf_{1\leq j\leq N} \varepsilon_{\alpha_j}$ et $m = \sup_{1\leq j\leq N} N_{\alpha_j}$. Si
$n \geqslant m$, on a $d(\alpha_j, x_n) \geqslant \varepsilon_{\alpha_j} \geqslant \varepsilon$ et ce pour tout
$j$ tel que $1\leq j\leq N$. Donc $x_n \notin \bigcup_{1\leq j\leq N} B(\alpha_j, \varepsilon_{\alpha_j})$,
ouvert qui contient $K$. Cette
assertion contredit l'hypothèse $x_n \in K$. $\square$

**Prop 3** Tout compact est borné.

Si $K \neq \emptyset$ est un compact de $(E, d)$ métrique,
$\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x, y \in K$, $d(x,y) \leq M$.

Preuve de la proposition 3.

on a l'inclusion évidente $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, 1)$.
On en extrait un recouvrement
fini : $\exists N$, $x_j$ pour $1\leq j\leq N$ tq $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B(x_j, 1)$.
Si $x \in K$, $\exists i \leq N$, $d(x, x_i) \leq 1$ et si $y \in K$,
$\exists j \leq N$, $d(y, x_j) \leq 1$. alors

$$d(x,y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y)$$
$$\leqslant 2 + \sup_{i,j} d(x_i, x_j) \equiv M < \infty$$

Donc $K$ est borné. $\square$

Prop ④ Tout compact est fermé.

Preuve de la proposition ④.

* Soit $x \notin K$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset K^c$ ; on peut placer toute une boule ouverte centrée en $x$ à l'extérieur de $K$.
[si $K = E$, il est clairement fermé ...]

* Si $x \notin K$, $\forall y \in K$, $x \notin B(y, \frac{1}{2} d(x,y))$.
De plus $K \subset \bigcup_{y \in K} B(y, \frac{1}{2} d(x,y))$, réunion ouverte qui recouvre $K$ dont on peut extraire une sous famille finie : $\exists N \in \mathbb{N}$, $y_j \in K$ pour $1 \leq j \leq N$ tq $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} B(y_j, \frac{1}{2} d(x,y_j))$.
Soit $\varepsilon = \inf_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{2} d(x,y_j)$ ; alors $\varepsilon > 0$ car l'infimum porte sur un ensemble fini.

* Montrons que $B(x,\varepsilon) \subset K^c$. Soit $z$ tel que $d(x,z) < \varepsilon$. Pour $1 \leq j \leq N$, on a

$d(x,y_j) \leq d(x,z) + d(z,y_j) \leq \varepsilon + d(z,y_j)$, donc

$$d(z,y_j) \geq d(x,y_j) - \varepsilon \geq \frac{1}{2} d(x,y_j) + \left(\frac{1}{2} d(x,y_j) - \varepsilon\right)$$
$$\geq \frac{1}{2} d(x,y_j)$$

. D'où $z \notin \bigcup_{1 \leq j \leq N} B(y_j, \frac{1}{2} d(x,y_j))$ qui contient $K$ ; $z \notin K$. $\square$

# Prop 5 Tout compact est complet

## Preuve de la proposition 5

* Il suffit de montrer que si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence (c'est le cas pour toute suite du compact au vu de la proposition 2), alors elle converge vers cette valeur d'adhérence !

* Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ une suite de Cauchy du compact $K$ et $\alpha \in K$ une valeur d'adhérence de cette suite (cf (1)). Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge **pas** vers $\alpha$, alors

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists p \geq N, \ d(u_p, \alpha) > \varepsilon_0 .$$

on écrit le critère de Cauchy avec $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ et on note $N_0$ l'entier correspondant ; alors

$$\forall p, q \geq N_0, \ d(u_p, u_q) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} .$$

* on prend $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ dans la définition (1) d'une valeur d'adhérence et $N = N_0$ introduit par le critère de Cauchy. Il existe $q \geq N_0$ tel que $d(u_q, \alpha) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0$. alors si $p \geq N_0$, on a

$$d(u_p, \alpha) \leq d(u_p, u_q) + d(u_q, \alpha) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 ,$$

ce qui contredit l'hypothèse de non convergence !
D'où le résultat. $\square$

## ③ Les compacts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

On admettra le résultat qui affirme que si de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente, alors l'espace de référence est compact.

### Th ② Forme forte de Bolzano-Weierstrass.

Soit $K$ un espace métrique non vide. Il est compact si et seulement si toute suite de $K$ admet une valeur d'adhérence dans $K$.

### Th ③ Un fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact

### Preuve du théorème ③.

* Soit $K \neq \emptyset$, $K \subset \mathbb{R}$ fermé et borné. Alors il existe $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $K \subset [a,b]$ puisque $K$ est borné.
Le théorème 1 (forme "faible" du théorème de Bolzano Weierstrass) montre alors que toute suite de $K$ admet une valeur d'adhérence $\alpha$. Alors $\alpha \in K$ car $K$ est fermé. Donc toute suite de $K$ admet une

valeur d'adhérence dans $K$ et $K$ est compact grâce à la forme forte du théorème de Bolzano-Weierstrass.

* Pour $K \neq \phi$, $K \subset \mathbb{R}^n$, on raisonne composante par composante. Si $K$ est borné, alors il existe des réels $a_j, b_j$ $(1 \leq j \leq n)$ de sorte que $K \subset \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$. Si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de $K$, elle est bornée, donc toutes les composantes $x_k^j$ $(1 \leq j \leq n)$ sont bornées et convergent vers $\alpha^j$ après extraction d'une sous-suite. Après une nouvelle extraction, c'est toute la suite $x_k$ qui a une sous-suite qui converge vers $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\alpha \in K$ si $K$ est fermé et la fin de la preuve est analogue au cas où $K \subset \mathbb{R}$. $\square$

• On peut montrer directement la

Prop 6 <u>Si $a, b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[a, b]$ est compact</u>

<u>Preuve de la proposition 6</u>

* C'est une généralisation du théorème 1. Soit $\mathcal{R} = (w_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$.

On pose $c = \frac{a+b}{2}$. Si on a un sous-recouvrement fini $(\omega_{j_k})_{1 \leq k \leq N}$ de $[a,b]$, alors la propriété est vraie.
Si ce n'est pas le cas, montrons qu'on aboutit à une contradiction. Alors on n'a pas de recouvrement fini pour l'intervalle $[a,c]$ <u>ou</u> pour l'intervalle $[c,b]$. Et de proche en proche on construit deux suite $a_k$ et $b_k$ pour $k \in \mathbb{N}$ de sorte que (3) est satisfaite. Comme pour la preuve du théorème 1, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $a_k$ et $b_k$ convergent vers $\alpha$.

* Soit $\omega \in \mathcal{R}$ tel que $\alpha \in \omega$ (puisque $\mathcal{R}$ recouvre $[a,b]$ et $\alpha \in [a,b]$). Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[ \subset \omega$ (un ouvert est voisinage de chacun de ses points). Comme $a_k$ et $b_k$ convergent vers $\alpha$, il existe $N$ entier tel que si $k \geq N$, $\alpha - \varepsilon < a_k \leq b_k < \alpha + \varepsilon$ et $[a_k, b_k] \subset ]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[ \subset \omega$ dès que $k \geq N$.
Cette inégalité contredit l'hypothèse que le sous-intervalle $[a_n, b_n]$ ne peut pas être recouvert par un sous-recouvrement fini de $\mathcal{R}$. D'où la propriété. $\square$

# 4) Fonctions continues sur les compacts.

## Th 4) L'image continue d'un compact est compacte

Soit $(K, d)$ un espace métrique compact ($K \neq \emptyset$), $(F, \delta)$ un autre espace métrique et $f : K \to F$ une application continue de $K$ dans $F$. Alors $f(K) = \{f(x), x \in K\}$, image directe de $K$ par $f$, est un compact de $F$.

## Preuve du théorème 4

Soit $(\omega_j)_{j \in J}$ des ouverts de $F$ tels que $f(K) \subset \left(\bigcup_{j \in J} \omega_j\right)$. Alors $K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \omega_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(\omega_j)$. Pour tout $j$, $f^{-1}(\omega_j)$ est ouvert car $\omega_j$ est ouvert et $f$ est continue. Donc leur réunion est ouverte et $K$ est recouvert par une famille d'ouverts. Comme il est compact, on en extrait une sous-famille finie ; il existe $N$ entier, $j_k \in J$ pour $1 \leq k \leq N$ de sorte que $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(\omega_{j_k})$. Donc $f(K) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{N} \omega_{j_k}\right)$ et on a un sous-recouvrement fini de $f(K)$, qui est donc compact. $\square$

**Prop 7** Une fonction numérique sur un compact atteint ses bornes.

Soit $K$ métrique compact non vide et $f: K \to \mathbb{R}$ une application continue. Il existe $x_0 \in K$ et $y_0 \in K$ de sorte que

(5) $$f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0), \ \forall x \in K$$

## Preuve de la proposition 7

Si $f$ est continue, l'image $f(K)$ du compact $K$ est un compact de $\mathbb{R}$. Donc il est borné. Soit $M = \sup f(K) = \sup_{x \in K} f(x) < \infty$. Alors $M$ appartient à l'adhérence $\overline{f(K)}$ de $f(K)$. Mais comme $f(K)$ est compact, il est fermé et $\overline{f(K)} = f(K)$. Donc $M$ appartient à $f(K)$ ; il existe $y_0 \in K$ de sorte que $\forall x \in K$, $f(x) \leq f(y_0)$, ce qui montre la partie "à droite" de l'inégalité (5). La preuve analogue pour la borne inférieure de $f(K)$ est laissée en exercice au lecteur. $\square$

Th ⑤ Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Soit $K \neq \phi$ métrique compact pour la distance $d$, $(F,\delta)$ un autre espace métrique et $f$ continue $K \to F$. Alors $f$ est uniformément continue:

(6) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in K, \; d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

## Preuve du théorème ⑤

* Rappelons que $f$ continue sur $K$, $f$ est continue en tout $x \in K$, c'est à dire

(7) $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_x > 0, \forall y \in K, \; d(x,y) < \eta_x \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

Il s'agit de montrer que $\eta_x > 0$ de la relation (7), qui dépend de $x$, en fait n'en dépend <u>pas</u> !

on écrit (7) en remplaçant $\varepsilon$ par $\varepsilon/2$,

* Si (7) a lieu, $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, \frac{\eta_x}{2})$ et

comme $K$ est compact $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N} B(x_j, \frac{1}{2}\eta_j)$, où $\eta_j \equiv \eta_{x_j}$. Soit $\eta$ tel que $0 < \eta < \frac{1}{2}\eta_j \; \forall j$.

On se donne $(x,y) \in K \times K$ de sorte que $d(x,y) < \eta$.

$\exists j \leq N$, $y \in B(x_j, \frac{1}{2}\eta_j)$. Alors $x \in B(x_j, \eta_j)$ [sans le facteur $\frac{1}{2}$ !] ;

$d(x, x_j) \leq d(x, y) + d(y, x_j) < \eta + \frac{1}{2}\eta_j \leq \frac{1}{2}\eta_j + \frac{1}{2}\eta_j = \eta_j$.
Alors $\delta(f(x), f(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et
$\delta(f(y), f(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $f$ est continue au point
$x_j$. Alors $\delta(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ et
la relation (6) est satisfaite : le nombre
$\eta > 0$ associé à tout $\varepsilon > 0$ pour exprimer la
continuité ne dépend pas du point $x$ où
l'on exprime la continuité ; la fonction
$f$ est uniformément continue.

Dubois
28 octobre 2013.