le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Paris, 2009 - 2016

Cours 01

Suites et séries de nombres réels

François Dubois

le cnam

Analyse Mathématique pour l'Ingénieur

Cours 1
Suites et séries de nombres réels *

a) Suites et séries de rationnels

- Nombres rationnels
- Suite et série arithmétique
- Suite et série géométrique
- Le corps des rationnels
- Quelques limites fondamentales
- Ordre total pour les rationnels
- Quelques questions sur la convergence des séries
- Suites de Cauchy

b) Définir les nombres réels

- Une construction délicate
- Structures pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels
- Borne supérieure, borne inférieure
- Partie entière
- Développement décimal illimité
- Non-dénombrabilité

c) Suites et séries de nombres réels

- Suites récurrentes
- Séries à termes positifs
- Convergence absolue
- Propriétés générales de $\mathbb{R}$

---

* François Dubois, 2009, édition septembre 2015, 58 pages.

AM I

Ch (1) Suites et séries de rationnels.

• Nombres rationnels.

On rappelle d'abord les notations classiques pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, les entiers naturels, les entiers (relatifs) et les rationnels. On a

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

(déf) Une **suite** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels est une **application** $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in \mathbb{Q}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre rationnel x_n est défini de façon unique.

(déf) **Série** associée à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il s'agit d'une nouvelle suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$(1) \quad S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

• Suite et série arithmétique.

Une **suite arithmétique** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par son premier terme x_0, **la raison a** et la relation de récurrence

(2) $x_{n+1} = x_n + a$, $n \in \mathbb{N}$

La série arithmétique est la somme des termes S_n introduite à la relation (1).

(Prop) <u>Expression algébrique</u> d'une suite arithmétique et de la série associée.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (2), alors on a

(3) $x_n = x_0 + n a$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors la série S_n définie à partir de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation (1) satisfait à

(4) $S_n = (n+1) x_0 + \frac{1}{2} n(n+1) a$, $n \in \mathbb{N}$.

- La preuve de cette proposition est divisée en deux étapes ; on prouve d'abord la relation (3), puis la relation (4). On procède par récurrence : si une propriété est paramétrée par les nombres entiers, on montre qu'elle est toujours vraie en vérifiant deux conditions précises. D'une part, la propriété est vraie "au démarrage" pour $n=0$. D'autre part, si elle est vraie à l'ordre n, elle est encore vraie à l'ordre $(n+1)$.

La preuve de la relation (3) par récurrence est un exercice très facile laissé au lecteur. La preuve de (4) utilise explicitement (3).

Si $n=0$, $S_0 = x_0$ et la relation (4) est bien vraie. Si elle est vraie à l'ordre n, On a à l'ordre $n+1$

$$S_{n+1} = S_n + x_{n+1}$$

$$= \{(n+1)x_0 + \frac{1}{2} n(n+1) a\} + \{x_0 + (n+1)a\}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et la relation (3)

$$= (n+2)x_0 + (n+1)a \left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

$$= (n+2)x_0 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\, a$$

ce qui établit la propriété. $\square$

- Suite et série géométrique

Une suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison q satisfait à la relation suivante

$$(5) \quad x_{n+1} = q\, x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A partir d'une telle suite, on peut former la série associée à l'aide de la relation (1).

Prop Expression algébrique d'une suite géométrique et de la série associée.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient respectivement les relations (5) et (1), on a

$$(6) \quad x_n = q^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}$$

et pour S_n, deux cas de figure. Si $q = 1$, $S_n = (n+1)x_0$ et pour $q \neq 1$,

(7) $$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\, x_0, \quad n \in \mathbb{N},\ q \neq 1$$

- La preuve de la relation (6) est un exercice analogue à la preuve de (3), mais l'addition est remplacée par la multiplication. Si $q=1$, la suite x_n est constante, donc elle est en fait arithmétique et ce premier résultat correspond à la relation (4) avec $a=0$. Si $q \neq 1$, on peut démontrer la relation (7) par récurrence (exercice laissé au lecteur!) ou remarquer la factorisation suivante :

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) =$$
$$= 1+q+q^2+\dots+q^n - q(1+q+\dots+q^{n-1}+q^n)$$
$$= 1-q^{n+1}$$

car deux termes seulement subsistent puisque tous les autres s'éliminent deux à deux. Nous retenons la relation

(8) $$1+q+\dots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

- <u>Le corps des rationnels.</u>

Tous les calculs algébriques faits aux pages précédents résultent des propriétés de $\mathbb{Q}$, muni de l'addition (+) et de la multiplication (×) :

(9) $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.

on a neuf propriétés axiomatiques qui sont effectivement satisfaits

(10) $x+(y+z)=(x+y)+z$ associativité de l'addition

(11) $0+x=x+0=x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$
le nombre 0 est un élément neutre

(12) $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists y \in \mathbb{Q},\ x+y=y+x=0$.
Existence d'un opposé $-x$ pour tout nombre rationnel.

- Les propriétés (10) (11) (12) font de $(\mathbb{Q},+)$ un groupe. Ce groupe est de plus commutatif :

(13) $x+y=y+x$, commutativité de l'addition.

Les propriétés (9) à (13) expriment que $(\mathbb{Q},+)$ est un groupe commutatif.

- Pour la multiplication, on a quatre relations de même type

(14) $x(yz)=(xy)z$ associativité de la multiplication

(15) $\exists 1\neq 0,\ 1\cdot x = x\cdot 1 = x,\ \forall x\in\mathbb{Q}$
le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication

(16) $\forall x\neq 0, \exists y\neq 0,\ xy=yx=1$

Tout nombre rationnel non nul x admet un inverse $y = 1/x$.

(17) $xy = yx$, commutativité de la multiplication

Les relations (14) à (17) font de $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \times)$ un <u>groupe commutatif</u>.

- Enfin, la <u>distributivité</u> de la multiplication par rapport à l'addition

(18) $x(y+z) = xy + xz, \quad x, y, z \in \mathbb{Q}$

permet de développer et éventuellement de factoriser des expressions algébriques.

- <u>Quelques limites fondamentales</u>

Une question naturelle si on se donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de savoir décrire son comportement "à l'infini", c'est à dire lorsque l'entier n devient de plus en plus grand, lorsqu'il "tend vers l'infini". Cette question constitue en soi un problème difficile. On commence par le cas des suites et séries arithmétique et géométrique introduites plus haut.

Nous allons voir apparaître des suites tendant vers $+\infty$, $-\infty$ et nous rappelons la définition.

(def) On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>tend vers plus l'infini</u> si l'entier n tend vers l'infini, et on écrit $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

si, en allant suffisamment loin, tous les termes de la suite peuvent être rendus plus grand que tout nombre rationnel A donné a priori :

$$(19) \quad \forall A\in\mathbb{Q},\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ x_n \geq A$$

$x_n \to +\infty$ si $n\to+\infty$

• De façon analogue $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si et seulement si

$$(20) \quad \forall A\in\mathbb{Q},\ \exists N\geq N,\ \forall n\geq N,\ x_n \leq A$$

(def) <u>Suite croissante, suite décroissante</u>

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>croissante</u> si

$$(21) \quad x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Elle est <u>décroissante</u> si

$$(22) \quad x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(Prop) <u>Limite de la suite arithmétique</u>

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite arithmétique qui satisfait à la relation (2), on a

• x_n = constante si $a=0$

- $x_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$ et $a > 0$
- $x_n \to -\infty$ si $n \to +\infty$ et $a < 0$.

- La preuve est claire pour $a = 0$. Pour $a > 0$, la relation (3) montre que x_n est de plus en plus grand si n est de plus en plus grand. Établissons rigoureusement cette propriété, ce qui consiste à démontrer la relation (1-9) dans ce cas. On se donne $A \in \mathbb{Q}$ arbitraire. On cherche à quelle condition sur n on va avoir $x_n \geq A$, c'est à dire $x_0 + na \geq A$. Comme $a > 0$, on peut diviser les deux membres de l'inégalité par a sans changer le sens de cette inégalité. Elle s'écrit donc $n \geq \frac{1}{a}(A - x_0)$. Considérons maintenant le nombre rationnel $\frac{1}{a}(A - x_0)$. Il existe certainement un nombre entier N qui le dépasse : $\exists N \in \mathbb{N}$, $N \geq \frac{1}{a}(A - x_0)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $n \geq N \geq \frac{1}{a}(A - x_0)$ et la relation (19) est établie.

La preuve de la relation (20) si $a < 0$ s'obtient de la même façon. Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

Prop Limite de la série associée à une suite arithmétique

On se donne $x_0 \neq 0$ et $a \neq 0$. On introduit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ arithmétique à l'aide de la relation (3) et la série associée S_n grâce à (1) on a alors le résultat :

- Si $a>0$, $S_n \to +\infty$ si $n \to +\infty$
- Si $a<0$, $S_n \to -\infty$ si $n \to -\infty$.

- La preuve de cette proposition résulte de la relation (4). On peut mettre $(n+1)$ en facteur dans cette relation et l'on a $S_n = (n+1)\left(\frac{na}{2} + x_0\right)$. Si n tend vers $+\infty$, $n+1$ et $\frac{na}{2} + x_0$ tendent tous deux vers $+\infty$ si $a>0$. Donc, modulo des règles de calcul "évidentes" sur les limites [ces règles de calcul ne sont bien entendu pas évidentes, mais ne sont pas explicitement reconstruites dans le cadre de ce cours destiné aux utilisateurs de l'analyse mathématique !], on a "clairement" $S_n \to +\infty$. Si $a<0$, l'un des facteurs de la suite S_n tend vers $+\infty$ et l'autre facteur $\left(\frac{1}{2}na + x_0\right)$ tend vers $-\infty$ cette fois. On en déduit que $S_n \to -\infty$, ce qui établit la proposition. $\square$

Prop Limite de la suite géométrique

Soit $x_0 \neq 0$ un nombre rationnel, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q (voir la relation (5)). On a le résultat suivant

(i) Si $q=1$, $x_n =$ constante, donc x_n converge vers x_0 si $n \to \infty$.

(ii) Si $q>1$, $x_n \to +\infty$ si $x_0>0$ et

$x_n \to -\infty$ si $x_0<0$

(iii) Si $q=-1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Elle ne converge vers aucun nombre rationnel, elle ne converge pas vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

(iv) Si $-1<q<+1$, alors $x_n \to 0$ si $n \to \infty$

(v) Si $q<-1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe à chaque terme, $|x_n| \to +\infty$ si $n \to \infty$. La suite diverge.

<u>Lemme</u> (résultat préliminaire)

Si $\alpha>0$ et $n\in\mathbb{N}$, on a l'inégalité

(23) $\quad (1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha.$

• La <u>preuve</u> de ce résultat résulte de la formule du binôme. Nous le montrons ici par récurrence. Pour $n=0$ (et $n=1$), la relation (23) est vraie et c'est même une égalité. Si la propriété est supposée vraie à l'ordre n, on a à l'ordre $(n+1)$:

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha)(1+n\alpha)$$

grâce à l'hypothèse de récurrence. Donc

$$(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha + n\,\alpha^2 \geqslant 1+(n+1)\alpha$$

et la relation (23) est établie à l'ordre $(n+1)$, ce qui montre la propriété. $\square$

• La preuve de la proposition relative à la limite de la suite géométrique est claire pour le point (i) où $q=1$ car alors $x_n = x_0$ pour tout n. Si $q>1$, on peut poser $q = 1+\alpha$ avec $\alpha>0$. Alors le lemme et la relation (23) montre que

$$q^n \geq (1+n\alpha)$$

et la suite q^n est plus grande qu'une suite qui tend vers $+\infty$ (car $\alpha>0$). Donc q^n tend vers $+\infty$ si $n \to +\infty$ lorsque $q>1$, ce qui montre le point (ii). Si $q=-1$, la suite géométrique s'écrit $x_0, -x_0, x_0, -x_0$. Elle est l'entrelacement de deux suites constantes. Elle reste bornée mais ne converge vers aucun nombre donné sans ambiguïté (car $x_0 \neq 0$ par hypothèse).

Si $-1<q<1$, on écrit (pour $q\neq 0$; si $q=0$ la propriété (iv) est claire et la preuve est laissée au lecteur)

$$|x_n| = \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n}|x_0| \quad , \; n \in \mathbb{N}.$$

alors $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$ et le dénominateur de la relation précédente est lui-même une suite géométrique de raison >1. Le point (iii) déjà établi montre que $\left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty$ si $n\to\infty$. Donc comme le numérateur de $|x_n|$ est constant, on en déduit $|x_n| \to 0$. Donc $x_n \to 0$ si $n \to \infty$.

Si $q<-1$, les signes changent à chaque

étape donc la suite ne converge pas. Toutefois la suite des valeurs absolues vérifie $|x_n| = |q|^n |x_0|$; c'est encore une suite géométrique de raison > 1 et la conclusion résulte du cas (i). D'où la proposition. $\square$

- ordre total pour les rationnels

Nous avons utilisé sans en rappeler les fondements l'ordre total $\leq$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, qui est compatible avec l'addition et la multiplication. Nous avons les cinq propriétés axiomatiques suivantes

(24) $(x \leq y)$ et $(y \leq z)$ impliquent $(x \leq z)$
transitivité des inégalités,

(25) $(x \leq y)$ et $(y \leq x)$ équivaut à $(x = y)$

(26) $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $(x \leq y)$ ou $(y \leq x)$ relation d'ordre

la relation d'ordre est totale et permet toujours de comparer deux nombres rationnels

- Les relations (24) (25) (26) font de $(\mathbb{Q}, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Il importe maintenant d'introduire les compatibilités avec les lois opératoires, de façon à savoir "calculer" avec les inégalités, ce qui constitue en quelque sorte le fondement de l'Analyse Mathématique !

(27) $(x \leq y)$ entraîne : $(\forall z \in \mathbb{Q},\ x+z \leq y+z)$
compatibilité de $\leq$ avec l'addition

(28) $(0 \leq x)$ et $(0 \leq y)$ entraîne $(0 \leq xy)$
l'ensemble des rationnels positifs est <u>stable</u> par multiplication.

(Prop) <u>Changement de signe</u>.

(29) $(0 \leq x)$ entraîne $(-x \leq 0)$.

La <u>preuve</u> de cette proposition repose sur l'hypothèse (26) d'ordre total. On suppose $x \geq 0$. Alors on sait que $(-x)$ peut être comparé à 0 : on a $(-x \leq 0)$ ou $(-x \geq 0)$. Dans le premier cas, la conclusion est établie et on a terminé. Dans le second cas, on peut ajouter x de part et d'autre de l'inégalité (grâce à (27)) et $(0 \geq x)$. Cette dernière inégalité, jointe à l'hypothèse, montre que $x = 0$ compte tenu de la relation (25). Mais même dans ce cas, $-x \leq 0$ reste vrai. La relation (29) est établie. $\square$

(def) La <u>valeur absolue</u> $|x|$ d'un rationnel est définie par

$$(30) \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- On a <u>l'inégalité triangulaire</u>

(31) $\quad |x+y| \leq |x|+|y|, \ x,y \in \mathbb{Q}$

qui s'écrit aussi sous la forme suivante

(32) $\quad \big||x|-|y|\big| \leq |x-y|, \ x,y \in \mathbb{Q}.$

On a par ailleurs compatibilité avec la multiplication, puisque

(33) $\quad |xy| = |x|\,|y|, \ x,y \in \mathbb{Q}.$

- <u>Quelques questions sur la convergence des séries.</u>

Rappelons que si on se donne une suite (u_n), la série "de terme général u_n" est identique à la suite dont le terme général S_n satisfait à $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On ajoute des contributions u_k et on se demande si leur somme tend vers "quelque chose", disons un nombre rationnel pour fixer les idées. Commençons par définir cette notion !

def <u>Limite d'une suite.</u>

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels et $l \in \mathbb{Q}$ un rationnel. On dit que x_n tend vers l (la limite) si n tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n \to +\infty} x_n = l$ si et seulement si on a

(34) $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ |x_n - l| \leq \varepsilon.$

On a un premier résultat : si $\sum_{k=0}^{n} u_k$ tend vers un nombre S qu'on notera $\sum_0^\infty u_k$, alors nécessairement u_k tend vers 0.

(Prop) Le terme général u_n d'une série convergente tend vers 0.

Si il existe $S \in \mathbb{R}$ de sorte que $S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers S alors u_n tend vers 0 si n tend vers l'infini.

- La preuve de cette proposition est simple. On écrit

(35) $\quad u_n = S_n - S_{n-1}$, $\underset{(n \geq 1)}{n \in \mathbb{N}}$ si $S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} u_k$.

alors la suite S_n tend vers S et la suite S_{n-1} tend aussi vers S. Donc la différence u_n tend vers $S - S = 0$. Mais cette preuve utilise des règles de calcul sur les limites, règles que nous n'avons pas rappelées dans ce cours. Nous en donnons aussi une preuve directe. Pour $n \geq 1$, on a (35) qu'on peut écrire aussi $u_n = (S_n - S) - (S_{n-1} - S)$. Alors étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un entier N de sorte que $|S_k - S| \leq \varepsilon/2$ si $k \geq N+1$.
[On notera les petites variations dans l'expression par comparaison avec la définition (34) !]
Alors si $n \geq N+1$, $n-1 \geq N$, $|S_n - S| \leq \varepsilon/2$, $|S_{n-1} - S| \leq \varepsilon/2$ et par l'inégalité triangulaire, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ si $n \geq N+1$.
Donc $u_n \to 0$ et le résultat est établi. $\square$

- La réciproque est une question très délicate. Étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers zéro, la série de terme général u_n, i.e. la suite S_n définie par $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, $S_0 = u_0$ tend-elle vers un nombre rationnel? La série géométrique, dans le cas $|q|<1$, va nous donner pour commencer une réponse positive.

Prop. <u>Somme de la série géométrique.</u>

Si x_n est la suite géométrique définie par la relation (5) et S_n la somme partielle (cf(11)), alors on a

$$(36) \quad \text{Si } |q|<1, \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x_0}{1-q}.$$

- La <u>preuve</u> de cette proposition résulte du calcul (7) et de la propriété $|q|^n \to 0$ si $|q|<1$ et $n\to\infty$. De plus, le passage à la limite dans les expressions algébriques (continues!) ne pose pas de difficulté. $\square$

* Par contre, la <u>série harmonique</u> définie pour $n\geq 1$ par

$$(37) \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

a un terme général qui tend vers zéro mais la somme $S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} 1/k$ croît indéfiniment.

(Prop) <u>Divergence de la série harmonique.</u>

(38) La somme $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ tend vers $+\infty$ si $n \to \infty$.

- La <u>preuve</u> consiste d'abord à remarquer que cette suite est croissante (le terme général de la série est positif). On a par ailleurs

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_4 - S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$S_8 - S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

De façon générale,

$$S_{2^{\ell+1}} - S_{2^\ell} = \sum_{k=2^\ell+1}^{2\cdot 2^\ell} \frac{1}{k}$$

$$\geqslant \sum_{k=2^\ell+1}^{2\cdot 2^\ell} \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2^{\ell+1}}\left(2\cdot 2^\ell - 2^\ell\right) = \frac{1}{2}$$

On en déduit

$$S_{2^p} = \left(S_{2^p} - S_{2^{p-1}}\right) + \left(S_{2^{p-1}} - S_{2^{p-2}}\right) + \dots + \left(S_2 - S_1\right) + S_1$$

$$\geqslant \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right)}_{(p-1)\text{ fois}} + 1 \geqslant \frac{p}{2}.$$

Donc S_n peut être rendu arbitrairement grande à partir d'un certain rang" à condition d'aller assez loin !

Techniquement pour $A \in \mathbb{Q}$ arbitraire, il existe un entier $p \geqslant 2A$. Alors pour $n \geqslant N = 2^p$ (noter ici le fait que N est "très grand"), on a $S_n \geqslant S_N \geqslant \frac{1}{2} p \geqslant A$. Donc $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ tend vers l'infini si $n \to \infty$. $\square$

- Nous avons utilisé plusieurs fois la propriété selon laquelle on peut toujours trouver un entier N qui dépasse un rationnel $r \in \mathbb{Q}$ donné d'avance. En fait la propriété est générale : $\mathbb{Q}$ est *archimédien* :

(39) $\forall A \in \mathbb{Q}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad N\varepsilon > A$.

Même avec des petits pas, on peut aller au bout du Monde ; il suffit d'en faire assez !

- Une conséquence de cette propriété est l'existence de la *partie entière* $E(x)$ d'un rationnel x quelconque. Pour $x \in \mathbb{Q}$, $E(x)$ est un *entier* tel que

(40) $E(x) \leqslant x < E(x)+1, \quad E(x) \in \mathbb{Z}$.

Il est unique et caractérisé par la relation (40). La partie entière $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

• Suites de Cauchy

Nous avons vu une série de terme général positif qui converge (par exemple $u_n = 1/2^n$) et une série qui a la même propriété mais qui tend vers l'infini ($u_n = 1/n$), donc diverge. Nous introduisons maintenant une notion "plus fine", qui exprime que les termes d'une suite sont tous voisins (aussi proches que l'on veut, ce à partir d'un certain rang).

(def) Suite de Cauchy.

~~La~~ suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels est "de Cauchy" si et seulement si

$$(41)\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, |x_p - x_q| \leq \varepsilon.$$

• Si x_n est la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors on peut choisir q de la forme $p+m$ avec m positif arbitraire et la condition (41) peut aussi s'écrire

$$(42)\quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall m \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=p}^{p+m} u_k\right| \leq \varepsilon.$$

• Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$, alors les termes sont de plus en plus proches de l, donc de plus en plus proches les uns des autres. On a la

(Prop) Toute suite convergente est de Cauchy

Soit $l \in \mathbb{Q}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels telle que x_n converge vers l si n tend vers l'infini. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy

- La preuve est naturelle. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour p et q entiers plus grands que N, on a à la fois $|x_p - l| \leq \varepsilon/2$ et $|x_q - l| \leq \varepsilon/2$. Alors l'inégalité triangulaire permet de conclure:

$$|x_p - x_q| = |(x_p - l) - (x_q - l)| \leq |x_p - l| + |x_q - l|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait à la relation (41). $\square$

- Par contraposition (propriété de la logique qui exprime que l'implication $A \Rightarrow B$ est équivalente à l'implication $(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$), une suite qui ne satisfait pas le critère de Cauchy diverge (ie ne peut pas converger vers $l \in \mathbb{Q}$). C'est par exemple le cas de la série harmonique.

(Prop) La série harmonique ne satisfait pas au critère de Cauchy.

- La preuve demande de nier la relation (42) par exemple puisqu'on a à faire à une série:

(43) $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p \geq N, \exists m \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=p}^{p+m} u_k\right| > \varepsilon$.

Or la preuve de la proposition page (17) nous conduit de choisir $\varepsilon = 1/2$ et $m = p$. On cherche donc à minorer une expression de la forme $\sum_{k=p+1}^{2p} u_k$, avec $u_k = \frac{1}{k}$. Or $\frac{1}{p+l} \geq \frac{1}{p+p}$ si $l \leq p$.

On en tire :

$$\sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2p} \sum_{k=p+1}^{2p} 1 = \frac{1}{2p}\, p = \frac{1}{2}$$

et la relation (43) est vraie : si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour tout N, on peut trouver $p \geq N$ et m entier de sorte que le "paquet de Cauchy" correspondant soit minoré. Ce qui établit la propriété. $\square$

- Une suite convergente est de Cauchy. Nous allons maintenant établir qu'il existe une suite (c'est la somme partielle de la série des inverses des factorielles où $u_k = 1/k!$) qui est de Cauchy mais ne converge pas vers $l \in \mathbb{Q}$

(Prop) La série de terme général $u_k = \frac{1}{k!}$ est de Cauchy :

(44) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall m \geq 0, \left|\sum_{k=p}^{p+m} \frac{1}{k!}\right| \leq \varepsilon$

- La preuve demande de majorer le paquet de Cauchy introduit à la relation (44).

Rappelons que $k! = 1\times 2\times \cdots \times (k-1)\times k$ si $k\in\mathbb{N}$ et que pour p fixé et $m\in\mathbb{N}$,

$$(45)\quad \frac{1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+\ell)} \leqslant \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\ell}.$$

Alors

$$\sum_{k=p}^{p+m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{p!}\left(1+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots+\frac{1}{(p+1)\cdots(p+m)}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{p!}\left(1+\frac{1}{p+1}+\left(\frac{1}{p+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{p+1}\right)^m\right) \text{ cf (45)}$$

$$\leqslant \frac{1}{p!}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p+1}} = \frac{p+1}{p}\,\frac{1}{p!}$$

en majorant la somme partielle de la série harmonique de raison $\frac{1}{p+1}$ par sa limite. Alors comme $p!\to\infty$ si $p\to\infty$, la relation (44) s'en déduit. $\square$

(Prop) La série de terme général $1/k!$ définit une suite croissante et majorée.

- La preuve est facile. La croissance de $\sum_0^n \frac{1}{k!}$ résulte de la positivité de $k!$. La majoration s'obtient comme plus haut :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{2}{n!}\right)$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\leqslant 2+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-1/3} = 2+\frac{3}{4}.$$

en majorant par la limite de la série,

géométrique. La proposition est établie.

- Le drame (des mathématiques grecques entre autres !) est que cette série, a priori "rapidement convergente" n'a pas de limite $l \in \mathbb{Q}$!

(Prop) La série de terme général $u_k = \frac{1}{k!}$ ne peut pas converger vers $l \in \mathbb{Q}$;
quel que soit $l \in \mathbb{Q}$, la suite $S_n \equiv \sum_0^n 1/k!$
ne converge pas vers l.

- La preuve consiste à raisonner par l'absurde. Supposons que $l = \frac{p}{q}$, p, q entiers ≥ 1 soit la limite de S_n. Alors q est un entier ≥ 2 ($\lim_n S_n$ est < 3 et > 2, donc ne peut pas être un nombre entier). On a alors

$$(46) \quad \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \cdots$$

On multiplie cette égalité par $q!$ et on introduit le "reste" R_q par

$$R_q = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \frac{1}{(q+1)\cdots(q+m)} + \cdots$$

alors d'une part $R_q > 0$ et d'autre part R_q est un nombre entier car, vu (46),

$$R_q = p(q-1) - \left(q! + q! + \frac{q!}{2!} + \cdots + 1\right) \in \mathbb{Z}$$

En fin, en majorant le membre de droite de (4.7),

$$R_q \leqslant \frac{1}{q+1}\left(1+\frac{1}{q+1}+\dots+\left(\frac{1}{q+1}\right)^m+\dots\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{q+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right)=\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{2} \text{ car } q\geqslant 2$$

Le nombre R_q est entier, est strictement positif (donc est supérieur ou égal à 1) <u>et</u> est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Nous sommes en pleine contradiction et la propriété est démontrée. $\square$

J Dubois
automne 2009.

Correction d'une coquille, suite aux remarques de Claude Durand, auditeur au CNAM Paris en 2010-2011.

JD, juin 2011.

Ch ② Définir les nombres réels

• Une construction délicate

Deux approches ont été développées à la fin du 19e siècle afin de définir de façon rigoureuse les nombres réels. Toutes deux demandent de longs développements afin de reconstruire l'ensemble des propriétés qui caractérisent le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Elles ne sont pas décrites dans le détail, mais nous en rappelons les grands principes.

Les coupures de Dedekind définissent un réel à partir de deux sous ensembles adjacents de rationnels. Ainsi, pour définir le nombre (réel) $\sqrt{2}$, on peut poser

(1) $A_- = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant 0,\ x^2 \leqslant 2\}$

(2) $A_+ = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geqslant 0,\ x^2 \geqslant 2\}$

et le couple (A_-, A_+) donne une définition possible de $\sqrt{2}$, dont on sait depuis Euclide qu'il ne peut pas être un nombre rationnel.

Les suites de Cauchy donnent une définition d'un réel comme une telle suite, à une suite tendant vers zéro près. Alors le réel

$$(3) \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

est bien défini puisque la suite qui le sous-tend est une suite de Cauchy (cf chap 1).

Toutefois, dans les deux cas, l'introduction rigoureuse de ces nombres "réels" demande une construction très lourde d'un haut niveau d'abstraction. Il n'est pas possible de la détailler ici, faute de temps. Nous conseillons au lecteur de consulter (par exemple) le livre de Jacques Dixmier et Pierre Dugac "Cours de mathématiques du premier cycle" (Dunod, Paris, 1967) où la construction de l'ensemble des réels (noté $\mathbb{R}$ dans la suite) est menée de manière à la fois rigoureuse et dynamique !

- <u>Structures pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels</u>

L'ensemble $\mathbb{R}$ est une extension de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$

$$(4) \quad \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} .$$

Les propriétés fondamentales de $\mathbb{Q}$ s'étendent à $\mathbb{R}$ (non sans difficulté !).

* $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un <u>corps commutatif</u>.

* $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est totalement ordonné avec compatibilité de la relation d'ordre "$\leq$" relativement à l'addition et à la multiplication.

* $\mathbb{R}$ est Archimédien

(5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \eta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n\eta > x$

Cette propriété exprime qu'en mettant à la suite les uns des autres un nombre suffisant ($n \in \mathbb{N}$) de "petits morceaux" (de taille $\eta > 0$), on peut dépasser tout (grand) nombre ($x \in \mathbb{R}$) donné d'avance. En d'autres termes, il n'y a pas de réel "infiniment grand" devant un autre on peut aussi écrire

(6) $$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

en prenant soin que les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne représentent pas des nombres réels :

(7) $$-\infty \notin \mathbb{R}, \ +\infty \notin \mathbb{R}.$$

* Borne supérieure

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure : c'est le plus petit élément de l'ensemble de ses majorants. Cette propriété différentie de façon fondamentale les réels des rationnels. Nous la détaillons.

Soit $A \neq \phi$, $A \subset \mathbb{R}$. Dire que A est <u>majoré</u> signifie qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout nombre x dans A, α est supérieur ou égal à x :

(8) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq \alpha$.

On note M_A l'ensemble (non vide !) des <u>majorants</u> de l'ensemble A :

(9) $M_A = \{ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq \alpha \}$.

Alors la propriété dite de l'existence d'une borne supérieure exprime qu'il existe $\beta = \sup A$ (la borne supérieure de A) de sorte que

(10) $\quad M_A = [\beta, +\infty[\ ;\ \beta \equiv \sup A$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon$ n'est <u>pas</u> un majorant de A et on peut nier l'expression (8) :

(11) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ \beta - \varepsilon < y \leq \beta$

sachant que $\beta = \sup A$ reste bien entendu un majorant de A :

(12) $\quad \forall x \in A,\ x \leq \beta = \sup A$.

La borne supérieure de A est le plus petit élément de l'ensemble M_A de ses majorants.

- La difficulté de cette notion est que l'on ne sait pas à priori si $\sup A$ appartient à A ou si $\sup A$ n'appartient pas à A. Les deux cas sont possibles !

(ex) $\sup(]-\infty, b]) = b$, $b \in]-\infty, b]$

$\sup(\{1-n, n \in \mathbb{N}\}) = 1$, $1 \in \{1-n, n \in \mathbb{N}\}$

$\sup(]-\infty, b[) = b$, $b \notin]-\infty, b[$

$\sup(\{x_n = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}) = 1$

$1 \in \mathbb{Q}$ et $1 \notin \{1 - \frac{1}{n}, n \text{ entier} \geq 1\}$

(ex) Soit $q \in]0,1[$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite géométrique telle que $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = q x_n$, $S_n = \sum_0^n x_j$ la série associée. Posons

$$A = \{S_n, n \in \mathbb{N}\}$$

alors on sait que S_n est une suite croissante qui tend vers $\frac{1}{1-q}$ et on a de plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n < \frac{1}{1-q}$. Alors $\sup A = \frac{1}{1-q} \notin A$.

La limite de S_n apparaît dans ce cas comme la borne supérieure des valeurs de la suite S_n. Elle n'est jamais atteinte, comme le montre l'inégalité stricte $S_n < 1/1-q$ vue plus haut.

- Si $q \in \mathbb{Q}$, l'exemple précédent permet de construire une borne supérieure qui est un nombre rationnel. Mais ce n'est pas toujours le cas ! L'intérêt de la propriété de la borne supérieure est de "donner existence" à des nombres "réels non rationnels".

(ex) Soit $A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$.
on sait depuis Euclide qu'il n'existe pas de rationnel x tel que $x^2 = 2$. Toutefois $\sup A$ est bien défini, c'est le nombre (réel) noté $\sqrt{2}$

$$(13) \qquad \sqrt{2} > 0, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Noter la nomenclature

$$(14) \qquad a \geq 0,\ a \in \mathbb{R} \implies \sqrt{a} \text{ a un sens}$$

$$(15) \qquad \sqrt{a} \geq 0, \quad \forall a \geq 0$$

$$(16) \qquad x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a. \end{cases}$$

(ex) Soit $A = \left\{ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},\ n \in \mathbb{N} \right\}$

S_n est une suite croissante de rationnels. Elle est majorée par 3. En effet,

$$S_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
$$\leq 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Donc $S_n \leq 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$

$\sup A = \lim_{n\to\infty} S_n$ est le nombre d'Euler e ; nous avons vu au chapitre précédent que e ne peut **pas** être un nombre rationnel :

(17) $\quad e \equiv \sum_0^\infty \frac{1}{k!}, \quad e \in \mathbb{R}, \quad e \notin \mathbb{Q}$

- Borne inférieure.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure : c'est le plus **grand** élément de l'ensemble des minorants. C'est essentiellement la "propriété duale" de ce qui a été vu pour la borne supérieure.

Soit $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \phi$ $\;$ B minoré signifie

(18) $\exists \beta \in \mathbb{R}, \; \forall y \in B, \; \beta \leq y$

l'ensemble m_B des minorants de B est alors non vide :

(19) $\quad m_B = \{\beta \in \mathbb{R}, \; \forall y \in B, \; \beta \leq y\}$.

La propriété exprime que cet ensemble est de la forme $]-\infty, \inf B]$. On a

(20) $\quad \forall y \in B, \quad \inf B \leq y$

(21) $\forall \varepsilon > 0, \; \exists y \in B, \; \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\inf B + \varepsilon$ est plus grand que le plus grand minorant donc ce n'est plus un minorant de B et la relation (20) est niée si on remplace $\inf B$ par $(\inf B + \varepsilon)$

- Rappelons que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers est minoré (par $0 \in \mathbb{N}$) mais n'est pas majoré (conséquence facile du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien). Par contre, le "comportement qualitatif" des sous-ensemble majorés de $\mathbb{N}$ est différent de ce que nous établissons pour les réels puisqu'on a

(22) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Toute partie non vide majorée de } \mathbb{N} \\ \text{admet un plus grand élément} \\ \text{(lequel par définition appartient à } \mathbb{N}\text{!)} \end{array} \right.$

Pour les parties de $\mathbb{R}$, la "borne supérieure" peut être un "plus grand élément" (et elle appartient à la partie correspondante) ou pas, et ce dernier cas est caractéristique du fait que $\mathbb{R}$ se présente comme un continuum qui "n'a pas de trou".

Prop $A \neq \emptyset$ majorée, $B \neq \emptyset$ majorée, $A, B \subset \mathbb{R}$

on pose

(23) $A + B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$.

alors $A+B$ est majorée et

(24) $\quad \operatorname{Sup}(A+B) \leq \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$

• La <u>preuve</u> de cette propriété est assez facile, mais souvent mal exprimée. D'une part, $A+B$ est majoré. On a en effet pour $x \in A$ et $y \in B$ arbitraires, $x \leq \sup A$, $y \leq \sup B$ puisque $\sup A$ et $\sup B$ majorent A et B respectivement. Donc $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ majore clairement $A+B$ en sommant les deux inégalités précédentes. Mais $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$, majorant de $A+B$, est nécessairement plus grand que le plus petit majorant ; c'est exactement ce qu'exprime l'inégalité (24). $\square$

<u>Exercice</u>. Qu'en est-il pour A et B minorées et les bornes inférieures correspondantes ?

• <u>Partie entière</u>

(Prop) Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier $E(x) \in \mathbb{Z}$ de sorte que

(25) $\quad E(x) \leq x < E(x)+1$.

• La <u>preuve</u> de cette propriété consiste à introduire l'ensemble $P = \{m \in \mathbb{Z},\ m \leq x\}$.
L'ensemble P est non vide et majoré !

Alors $P \subset \mathbb{Z}$ a un plus grand élément, noté $E(x)$. Alors $E(x)+1$ n'appartient pas à P et l'inégalité stricte de la relation (25) s'en déduit. L'entier $E(x)$ est unique car si $n \neq m$ sont deux parties entières différentes, on a par exemple $n < m$ donc $n+1 \leqslant m$; grâce à (25), on a la chaîne d'inégalités

$$n \leqslant x < n+1 \leqslant m \leqslant x < m+1$$

donc $x < x$ ce qui est contradictoire. La propriété est établie. $\square$

- Développement décimal illimité.

Nous avons d'abord une propriété fondamentale, qui est la transposition pour les suites de la propriété de la borne supérieure

(Th) Toute suite croissante majorée de réels est convergente.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x_{n+1} \geqslant x_n$ et telle que

(26) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leqslant \alpha$,

alors x_n converge vers $l = \sup(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$.

• La preuve de ce résultat consiste à introduire la partie A de $\mathbb{R}$ définie par la suite (x_n) : $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est non vide et majorée, compte tenu de (26). Posons $l = \sup A$ le plus petit majorant de A ; on a donc

(27) $\forall n \in \mathbb{N}, \; x_n \leq l$

(28) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \; l - \varepsilon < x_N$.

puisque $l - \varepsilon$ n'est plus un majorant de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on déduit de (27) et (28)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; l - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq l.$$

Dans ces conditions, $-\varepsilon \leq x_n - l \leq 0$ et $|x_n - l| \leq \varepsilon$ et la définition de la propriété $\lim_{n \to \infty} (x_n) = l$ est démontrée.

(R) Comme $\lim_{n \to \infty} x_n = l$, il ne peut pas y avoir d'autre limite puisqu'une limite est toujours unique (voir par exemple le traité de premier cycle de Jacques Dixmier !)

• On se donne l'ensemble $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ des dix chiffres de la numération décimale. Pour $a_n \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

(29) $$u_n = \frac{a_n}{10^n}, \quad a_n \in D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1$$

Puis on introduit la série associée ; on pose $S_n = \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n} a_j/10^j$.

(Prop) La suite S_n converge vers un nombre réel $S \equiv \sum_{1}^{\infty} u_j$.

- La preuve de cette proposition est une conséquence directe du théorème précédent. D'une part, S_n est croissante car $u_n \geq 0$ puisque $D \subset \mathbb{N}$. D'autre part, S_n est majorée puisque $a_n \leq 9$ pour tout n. On a en effet

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

$$\leq \frac{9}{10} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1. \quad \square$$

- Toute série de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^n}$, $a_n \in D$ définit un nombre réel $x \in [0,1]$. La réciproque est vraie !

(Th) Développement décimal illimité

Etant donné $x \in [0,1[$, on définit une suite $a_n \in D$ pour n entier ≥ 1 de la façon suivante ; on pose $x_0 \equiv x$,

$$(30) \quad a_1 = E(10x), \; x_1 = 10x - a_1,$$

$$(31) \quad a_k = E(10x_{k-1}), \; x_k = 10x_{k-1} - a_k.$$

alors la série de terme général $\frac{a_k}{10^k}$, ie la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k/10^k$ converge vers x et on a

$$(32) \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}, \quad n \geq 1.$$

- La suite $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ s'appelle le développement décimal illimité du nombre réel $x \in [0,1[$. En base 10, on peut écrire x comme un "nombre à virgule avec une infinité de décimales":

$$(33) \quad x = 0{,}a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n \dots$$

et les points de suspension indiquent simplement un passage à la limite :

$$(34) \quad x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

- La preuve de la relation (32) repose sur le lemme suivant

$$(35) \quad \sum_{l=k+1}^{n} \frac{a_l}{10^{l-k}} \leq x_k < \sum_{l=k+1}^{n} \frac{a_l}{10^{l-k}} + \frac{1}{10^{n-k}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

avec a_k et x_k définis par les relations (30)(31).

On montre cette relation par récurrence sur n.

* Pour $n = 1$, on tire de la relation (30) :

$a_1 \leq 10\, x_0 < a_1 + 1$ soit $\frac{a_1}{10} \leq x_0 < \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$,

ce qui constitue exactement la relation (35) avec $k = 0$ et $n = 1$.

* Pour $n \geq 1$ fixé, on suppose la relation (35) satisfaite pour tout k entier entre 0 et $n-1$. On montre la relation (35) avec n remplacé par $n+1$ et on commence par la valeur $k=n$. Mais on tire de la relation (31) : 14

$a_{n+1} \leq 10\, x_n < a_{n+1} + 1$ soit $\dfrac{a_{n+1}}{10} \leq x_n < \dfrac{a_{n+1}}{10} + \dfrac{1}{10}$,

ce qui constitue exactement (35) avec n remplacé par $n+1$ et $k=n$.

* On montre alors la relation (35) avec n remplacé par $(n+1)$ en décroissant relativement à la variable k. Pour $k=n$, la relation est vraie. Si on la suppose vraie à l'ordre k, i.e. si

$$(36) \quad \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{a_l}{10^{l-k}} \leq x_k < \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{a_l}{10^{l-k}} + \frac{1}{10^{n+1-k}}$$

qu'en est-il pour x_{k-1} qui vérifie déjà

$$\sum_{l=k}^{n} \frac{a_l}{10^{l-(k-1)}} \leq x_{k-1} < \sum_{l=k}^{n} \frac{a_l}{10^{l-(k-1)}} + \frac{1}{10^{n-(k-1)}} \; ?$$

On tire x_{k-1} de (31) et on reporte dans la relation (36). Il vient

$$\frac{a_k}{10} + \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{a_l}{10^{l+1-k}} \leq x_{k-1} < \frac{a_k}{10} + \sum_{l=k+1}^{n+1} \frac{a_l}{10^{l+1-k}} + \frac{1}{10^{n+2-k}}$$

ce qui constitue exactement l'inégalité (35) avec n remplacé par $n+1$ et k remplacé par $k-1$

- On écrit ensuite la relation (35) avec $k=0$, ce qui constitue exactement la relation (32) et prouve le résultat. $\square$

- Le développement décimal illimité est la façon usuelle de décrire les nombres réels. Ainsi, $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$; $\sqrt{2} = 1,414\ldots$; $e = 2,718\ldots$; $\pi = 3,14159\ldots$

- On prendra garde au fait que le développement décimal illimité n'est **pas** unique pour les nombres décimaux (nombres de la forme $\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{10^k}$, avec N fini). En effet, on a vu que $0,999\ldots = 1$, relation qui se généralise facilement en $0,0999\ldots = \frac{1}{10}$, etc.

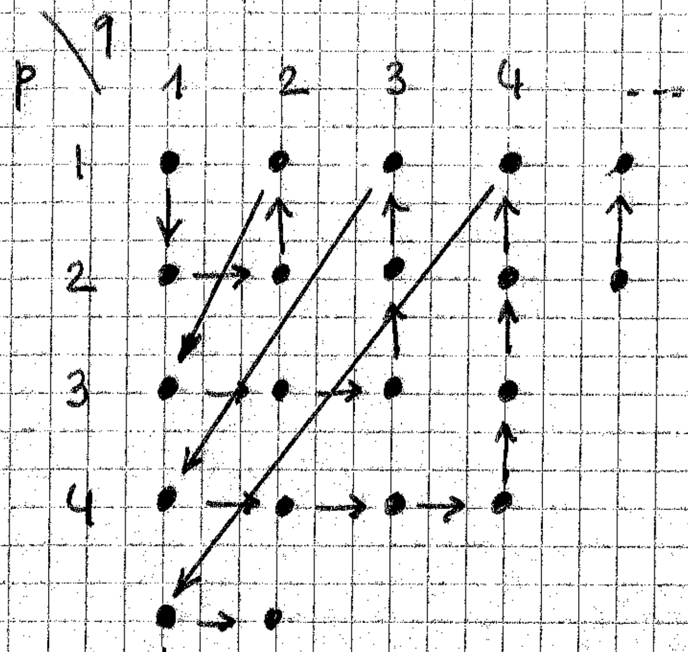
- **Non-Dénombrabilité**

(def) Un ensemble dénombrable X est tel qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur X.
Un tel ensemble "peut être compté" à l'aide des nombres entiers.

(ex) $X = 2\mathbb{N} = \{2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable ; l'application f est simplement $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n \in X$.

(exo) $X = \mathbb{Z}$ est dénombrable.

(Prop) Soit X un ensemble tel qu'il existe $f : \mathbb{N} \to X$ surjective ($\forall x \in X, \exists n \in \mathbb{N},\ f(n) = x$). Alors X est fini ou dénombrable.



Chemin dans $(\mathbb{N}\times\{0\})^2$

(Prop) L'ensemble $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ est dénombrable

- La preuve consiste à parcourir le réseau $(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$ à l'aide du chemin décrit à la figure ci-dessus. On construit f bijective $\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ de la façon suivante :
$f(0)=(1,1)$, $f(1)=(2,1)$, $f(2)=(2,2)$, $f(3)=(1,2)$
et de façon générale, on remarque qu'il y a m^2 couples de la forme (i,j) avec $1\leq i,j\leq m$.
On peut donc poser
$f(m^2)=(m+1,1)$, $f(m^2+1)=(m+1,2)$, ..., $f(m^2+m-1)=$
$=(m+1,m+1)$, $f(m^2+m)=(m,m+1)$,
$f(m^2m+1)=(m-1,m+1)$, ..., $f(m^2+m+m-1)=(1,m+1)$,
ce qui permet de numéroter la "bande" des (i,j) avec $1\leq i,j\leq m+1$ et i ou j égal à $m+1$ (il y a exactement $2m+1$ tels couples). On peut continuer avec la bande suivante, ce qui montre la propriété par récurrence. □

Th L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable

• La preuve est essentiellement une conséquence de la proposition précédente. Soit x rationnel strictement positif ; alors $x = p/q$ avec p, q entiers ≥ 1. On a donc une application naturelle

$$g : (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$$
$$(p, q) \mapsto g(p, q) = \frac{p}{q}.$$

Alors l'application $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$ avec f décrite à la proposition précédente permet de numéroter tous les nombres rationnels strictement positifs. La conclusion résulte d'une simple duplication pour atteindre tous les rationnels non nuls puis par décalage d'une unité, tous les rationnels. Le détail de la preuve est laissé au lecteur ! $\square$

Th L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.

C'est la grande différence entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Il y a "beaucoup plus" de nombres réels que de nombres rationnels. On peut "compter" les nombres rationnels ; on ne peut pas compter les nombres réels.

- La preuve consiste à montrer la propriété pour $x \in [0,1[$ par le procédé diagonal de Cantor. On a vu que pour $x \in [0,1[$, on peut construire son développement décimal illimité ; il existe $a_k(x) \in D$ pour $k \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ de sorte que

$$(37) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(x)}{10^k} \,, \quad x \in [0,1[\,.$$

Le raisonnement de Cantor consiste à imaginer que $\mathbb{R}$ est dénombrable et aboutir à une contradiction. On suppose avoir numéroté tout l'intervalle $[0,1[$. On dispose donc de l'application surjective $\mathbb{N} \ni n \longmapsto \xi_n \in [0,1[$. Pour tout $x \in [0,1[$, il existe n tel que $x = \xi_n$ et on peut considérer le développement décimal illimité (37) associé qui s'écrit maintenant

$$(38) \qquad \xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}\, a_k(\xi_n) \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Le nombre entier (appartenant à $\{0, 1, \ldots, 9\}$) $a_k(\xi_n)$ est le k^{e} chiffre (en base 10) du n^{o} nombre réel.

* Avec Cantor, nous construisons un réel y en modifiant l'entier "diagonal" $a_k(\xi_k)$. Pour k entier ≥ 1, on pose

$$(39) \qquad \beta_k = \begin{cases} a_k(\xi_k) + 1 & \text{si } 0 \leq a_k(\xi_k) \leq 8 \\ 0 & \text{si } a_k(\xi_k) = 9 \,. \end{cases}$$

Alors $\beta_k \in D$ et $\beta_k \neq a_k(\xi_k)$ par construction. On pose $y = \sum_{k \geq 1} \beta_k / 10^k$.
Alors le réel $y \in [0,1[$ n'a pas pu être numéroté par la suite des ξ_n. En effet si il existe $m \in \mathbb{N}$ de sorte que $y = \xi_m$, considérons le m^e chiffre de y. C'est d'une part β_m par définition même de y et c'est d'autre part $a_m(\xi_m)$ car $y = \xi_m$ qui se développe sous la forme (38). Comme $\beta_m \neq a_m(\xi_m)$, la contradiction est établie.
Le nombre y construit en modifiant la diagonale $a_k(\xi_k)$ n'a pas pu être numéroté et une telle numérotation n'existe donc pas.
L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable et $\mathbb{R}$ tout entier a fortiori. $\square$

Dubois
octobre 2009.

Suite à la lecture de ce cours par Claude Durand, auditeur au CNAM, correction de deux coquilles en juin 2011.

Dubois.

AMI

ch ③ Suites et séries de nombres réels.

• Suites récurrentes.

Ce sont des suites de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est une fonction donnée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, une suite arithmétique correspond à $f(x) = x + a$ et une suite géométrique à $f(x) = q \cdot x$.

(α) On se donne $a > 0$ et $x_0 > 0$. On pose

$$(1) \quad x_{n+1} = 2 \frac{a x_n}{a + x_n^2}$$

* Une première question (naturelle !) est de savoir si la suite est monotone, donc si $x_{n+1} \geqslant x_n$ ou $x_{n+1} \leqslant x_n$. On étudie donc la différence $x_{n+1} - x_n$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{a + x_n^2} \left(2a\, x_n - (a + x_n^2)\, x_n \right)$$

$$= \frac{x_n}{a + x_n^2} (a - x_n^2)$$

qui est $\geqslant 0$ si $0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{a}$ et $\leqslant 0$ si $x_n \geqslant \sqrt{a}$.

* On peut aussi essayer de calculer une limite éventuelle, c'est à dire de faire l'hypothèse que $x_n \to l$ si n tend vers $+\infty$. alors (et là nous n'avons pas dans le cadre de ce cours repris l'énoncé et la preuve des résultats classiques sur les fonctions continues de limites) on a

$$l = \frac{2al}{a+l^2}, \text{ c'est à dire } l = 0 \text{ ou } l^2 = a.$$

Nous avons donc trois candidats a priori pour la valeur limite : $l = -\sqrt{a}$, $l = 0$, $l = \sqrt{a}$.

* Il est donc "naturel" d'étudier la position de x_{n+1} par rapport à $\sqrt{a}$, c'est à dire de x_{n+1}^2 par rapport à a. Or

$$a - x_{n+1}^2 = a - \frac{4a^2 x_n^2}{(a+x_n^2)^2}$$

$$= \frac{a(a-x_n^2)^2}{(a+x_n^2)^2} \geqslant 0$$

Même si $x_0 \geqslant \sqrt{a}$, on a $x_1 \leqslant \sqrt{a}$ et $\forall n \geqslant 1$
$x_n^2 \leqslant a$.

* Nous utilisons ce dernier résultat pour établir la monotonie de la suite x_n :
$a - x_n^2 \geqslant 0$ donc $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ et la suite est croissante. On a donc les inégalités

$$0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \sqrt{a}.$$

La suite x_n est croissante et majorée.
Elle converge vers $\ell > 0$ si $x_0 > 0$ (faire attention au cas "évident" où $x_0 = 0$ puis $x_n = 0$ pour tout n), donc vers $\sqrt{a}$.
* Avec une vitesse prodigieuse d'ailleurs !

• Séries à termes positifs.

On se donne $u_n \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $u_n \to 0$. On pose

$$(2) \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (la série associée à u_n) définit une suite croissante :

$$(3) \quad S_{n+1} \geqslant S_n$$

car $u_{n+1} \geqslant 0$. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, elle converge ; on note S sa limite, ou encore

$$(4) \quad S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$$

• Des exemples ont été vus avec les rationnels ; $u_k = \frac{1}{k!}$ définit

$$(5) \quad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \simeq 2,718$$

pour fixer les idées.

- Si S_n n'est pas bornée, alors elle tend vers $+\infty$, elle diverge et elle n'est pas de Cauchy. On peut par exemple vérifier facilement que la série $u_k = \frac{1}{k}$ harmonique ne vérifie pas le critère de Cauchy. En effet

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \text{ se minore facilement:}$$

$$S_{2N} - S_N \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

et cette propriété est une négation (logique!) du critère de Cauchy

Th Critère de comparaison.

Soit u_n, v_n deux séries de terme général $\geqslant 0$ de sorte que

(6) $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

On a alors les propriétés suivantes

* v_n convergente $\Rightarrow$ u_n convergente

* u_n divergente $\Rightarrow$ v_n divergente

qu'on peut écrire aussi

(7) $\quad \sum_n v_n < \infty \Rightarrow \sum_n u_n < \infty$

(8) $\quad \sum_n u_n = \infty \Rightarrow \sum_n v_n = \infty$

- la preuve de ce résultat est simple. Pour montrer que (u_n) converge si c'est le cas pour v_n, il suffit de montrer que S_n est majorée. or

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} v_k < \infty$$

car $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ est un nombre réel bien défini donc "strictement inférieur" à $+\infty$.
La suite S_n est croissante et majorée, donc est convergente

- Si $\sum_{0}^{\infty} u_n = \infty$, la suite S_n ne satisfait pas au critère de Cauchy :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \geqslant N, p \geqslant q, \sum_{p+1}^{q} u_k \geqslant \varepsilon.$$

alors $\sum_{p+1}^{q} v_k \geqslant \sum_{k=p+1}^{q} u_k \geqslant \varepsilon$ et la série associée à v_k ne satisfait pas non plus le critère de Cauchy $\square$

- Nous allons utiliser le théorème de comparaison pour démontrer que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge. Pour cela, nous introduisons

$$(9) \qquad v_k = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Comme $v_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, on a

$$\sum_{k=2}^{N} v_k = 1 - \frac{1}{N}$$ qui tend vers 1 si $N \to \infty$.

La série de terme général v_k converge.
De plus, la relation (6) a bien lieu car

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k-1} \text{ donc } \frac{1}{k^2} \leq v_k.$$

Le théorème de comparaison permet de conclure à la convergence :

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

- Le même théorème de comparaison (relation (7)) permet de montrer que pour $\alpha \geq 0$, la série de terme général $\frac{1}{k^{\alpha+2}}$ converge

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+2}} < \infty. \quad (\alpha \geq 0).$$

La preuve est laissée au lecteur.

- A ce niveau d'étude, nous ne savons rien dire de la convergence ou la divergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $1 < \alpha < 2$

- Pour d'autres séries, la comparaison à une série géométrique donne le comportement.

Prop Pour $\alpha>0$ et $k\in\mathbb{N}$, on pose

$$(12) \quad u_k = \frac{\alpha^k}{k!}.$$

alors la série de terme général u_k converge. Sa somme se note $e^\alpha = \exp(\alpha)$:

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^\alpha.$$

- La preuve de cette proposition consiste à comparer u_k à une suite géométrique. Soit N entier $>\alpha$ et $k\geqslant N$. On a alors

$$u_k = \frac{\alpha^N}{N!}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right)\left(\frac{\alpha}{N+2}\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{k}\right)$$

$$\leqslant \frac{\alpha^N}{N!}\left(\frac{\alpha}{N+1}\right)^{k-N} = \frac{(N+1)^N}{N!}\, q^k$$

avec $q=\frac{\alpha}{N+1}\in\,]0,1[$. Par ailleurs, N est fixé, donc $(N+1)^N/N!$ est une constante qui ne perturbe pas la convergence de la série géométrique. La propriété est établie. $\square$

• Convergence absolue.

Cette notion est fondée sur la propriété qui est une quasi-définition de l'ensemble des nombres réels

(th) $\mathbb{R}$ est <u>complet</u>.

Toute suite de Cauchy est convergente, c'est à dire que la condition

(12) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| \leq \varepsilon$

entraîne

(13) $\begin{cases} \exists \ell \in \mathbb{R}, & \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \\ & \forall n \geq N, \quad |x_n - \ell| \leq \varepsilon \end{cases}$

(th) <u>Convergence absolue d'une série</u>.

Soit $u_n \in \mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$

on suppose que la série à termes positifs $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, c'est à dire

(14) $\sum_0^\infty |u_k| < \infty$, ou $\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq M$.

alors la série $\sum u_k$ converge dans $\mathbb{R}$:

(15) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left| \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell \right| \leq \varepsilon$.

- La preuve de la relation (15) est fondée sur la vérification du critère de Cauchy ; il suffit de montrer que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy. Or pour $q \geq p$, $S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} u_k$. Donc grâce à l'inégalité triangulaire,

$$(16) \quad |S_q - S_p| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |u_k|$$

Comme la série $\sum |u_k|$ converge, elle est de Cauchy ; si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq N$, $\sum_{k=p+1}^{q} |u_k| \leq \varepsilon$. On déduit de cette inégalité et de (16) : $|S_q - S_p| \leq \varepsilon$, ce qui démontre que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge. La propriété (15) est alors une conséquence directe de (13).

- Les exemples de séries absolument convergentes sont nombreux. On peut à loisir changer le signe des termes de la série si elle est absolument convergente. On définit une <u>autre</u> somme, mais on définit encore un nombre réel.

* exemples $\sum_0^{\infty} (-1)^n u_n$, avec $\sum_0^{\infty} |u_n| < \infty$

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$; cette série définit $\exp x \equiv e^x$. En effet,

$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}$, série à termes positifs dont nous avons vu (page 7 de ce chapitre !) qu'elle est convergente.

* On peut étendre la notion de convergence absolue aux séries à valeurs complexes. Rappelons que le corps $\mathbb{C}$ des complexes s'obtient à partir de $\mathbb{R}$ en posant

(17) $\quad z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}$

avec une extension de la multiplication de sorte que (18) $\quad i^2 = -1$.

Alors le module $|z|$ de $z \in \mathbb{C}$, défini par

(19) $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad z = a+ib$

joue le rôle analogue à la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. On a en particulier

(20) $\quad |z+z'| \leq |z| + |z'|$

(21) $\quad |z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0$.

On a une extension à $\mathbb{C}$ du théorème qui assure que toute suite de Cauchy converge

(Th) $\mathbb{C}$ est complet
Si $z_n \in \mathbb{C}$ est une suite de Cauchy, elle converge

- La preuve est facile.
  Si $z_n = a_n + i b_n$, on a bien sûr
  $|a_n - a_m| \leqslant |z_n - z_m|$ et $|b_n - b_m| \leqslant |z_n - z_m|$
  donc si $(z_n)_{n \in \mathbb{C}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$,
  c'est à dire
  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N, |z_n - z_m| \leqslant \varepsilon$,
  c'est encore le cas pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont des suites à valeurs réelles.
  Donc elles convergent vers α et β respectivement.
  En conséquence, z_n converge vers $\alpha + i\beta$. $\square$

(Th) Convergence absolue dans $\mathbb{C}$.

Soit $z_n \in \mathbb{C}$ telle que la série de terme général $|z_n|$ converge : $\sum_n |z_n| < \infty$.
Alors la série $\sum z_n$ converge dans $\mathbb{C}$.

- La preuve est analogue à celle de la convergence absolue d'une série $u_n \in \mathbb{R}$ tq $\sum |u_n| < \infty$.
  Elle est laissée en exercice au lecteur. $\square$

• Propriétés générales de $\mathbb{R}$.

Th $\mathbb{R}$ est complet (déjà vu)
Toute suite de Cauchy est convergente dans $\mathbb{R}$.

Th $\mathbb{R}$ est séparable

Il existe une "suite dense" $x_n \in \mathbb{R}$ qui approche tous les réels aussi près que l'on veut ; le corps des réels n'est pas dénombrable mais est bien approché par une sous-famille dénombrable.

Une telle suite est telle que
$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n - \xi| \leqslant \varepsilon$.

• En effet, le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, via par exemple le développement décimal, permet d'approcher tout réel ξ aussi près qu'on veut. De plus, c'est un ensemble dénombrable puisque $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Th de Bolzano-Weierstraß.

$\mathbb{R}$ est relativement compact,

c'est à dire que de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous suite $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge.

• Une sous-suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'obtient en ne prenant que certains termes de la suite, sans jamais revenir en arrière.
Techniquement, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une injection ($\varphi(k) = \varphi(\ell)$ implique $k = \ell$) croissante ($\varphi(k+1) \geqslant \varphi(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

(22) $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n| \leqslant M$.

* Nous fabriquons deux suites α_n, β_n "adjacents", c'est à dire telles que

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha_n \leqslant \beta_p, & \forall n, p \in \mathbb{N} \\ \beta_n - \alpha_n \to 0 & \text{si } n \to \infty \end{cases}$$

et $x_{\varphi(k)} \in [\alpha_k, \beta_k]$ de proche en proche.

* on pose $\alpha_0 = -M$, $\beta_0 = +M$, $\gamma_0 = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \beta_0)$.
L'intervalle $[\alpha_0, \gamma_0]$ contient-il une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Soit $I_0^- = \{ n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \in [\alpha_0, \gamma_0] \}$. Si cet ensemble est infini, on pose $\varphi(1) = \min I_0^-$, $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = \gamma_0$. Sinon, l'ensemble $I_0^+ = \{ n \in \mathbb{N}^*, \ x_n \in [\gamma_0, \beta_0] \}$ est infini nécessairement. On pose $\varphi(1) = \min I_0^+$, $\alpha_1 = \gamma_0$, $\beta_1 = \beta_0$. On remarque que dans tous les cas, $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0$, $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_0)$

et $x_{\varphi(1)} \in [\alpha_1, \beta_1]$.

* on suppose avoir construit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante jusqu'à l'ordre p de sorte que $\forall k, l \leq p$, $\alpha_k \leq \beta_l$ et $\beta_k - \alpha_k = \frac{1}{2}(\beta_{k-1} - \alpha_{k-1})$ pour $k \leq p$. On suppose aussi avoir défini $\varphi(p) > \varphi(p-1) > \dots > \varphi(1)$ entiers de sorte que $x_{\varphi(k)} \in [\alpha_k, \beta_k]$. Cette construction se poursuit indéfiniment. Soit

$I_p^- = \{ n \geq \varphi(p)+1,\ x_n \in [\alpha_p, \gamma_p \equiv \frac{1}{2}(\alpha_p+\beta_p)] \}$.

Si I_p^- est une partie infinie de $\mathbb{N}$, on note $\varphi(p+1)$ son plus petit élément, $\alpha_{p+1} = \alpha_p$, $\beta_{p+1} = \gamma_p$ et $x_{\varphi(p+1)} \in [\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}]$ par construction.

Si cet ensemble est fini, l'autre ensemble

$I_p^+ = \{ n \geq \varphi(p)+1,\ x_n \in [\gamma_p, \beta_p] \}$ est infini, on note $\varphi(p+1)$ son plus petit élément,

$\alpha_{p+1} = \gamma_p$, $\beta_{p+1} = \beta_p$, $x_{\varphi(p+1)} \in [\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}]$. De plus, dans chaque cas, $\alpha_p \leq \alpha_{p+1} \leq \beta_{p+1} \leq \beta_p$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, $\beta_{p+1} - \alpha_{p+1} \leq \frac{1}{2}(\beta_p - \alpha_p)$ par construction.

* Cette méthode de <u>dichotomie</u> (division successive de l'intervalle en deux parties) permet la construction de ces deux suites qui convergent clairement vers la même limite l [$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante majorée, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car elle est décroissante minorée,

et la limite est la même car $\beta_n - \alpha_n$ tend vers zéro]. De plus, $x_{\varphi(k)} \in [\alpha_k, \beta_k]$ pour tout k et φ est clairement une injection croissante $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Donc $x_{\varphi(k)}$ converge vers l si $k \to \infty$ et le théorème est établi. $\square$

- Comme exemple d'extraction de sous-suite, il suffit de considérer $u_n = (-1)^n$: $1; -1; 1, \dots$ Elle est bornée. La suite extraite u_{2k} est identiquement égale à 1 ($\varphi(k) = 2k$) alors que la suite des impairs u_{2k+1} est identiquement égale à -1 ($\varphi(k) = 2k+1$ dans ce cas). Cette suite a deux valeurs d'adhérence, qui sont les limites possibles des sous-suites extraites convergentes.

Dubois

Orsay, 4 novembre 2009

Correction de quelques coquilles suite aux remarques de Claude Durand, auditeur CNAM en 2010, 2011.

Versailles, 5 juin 2011

Dubois.