

### Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

#### Devoir 3, à rendre pour la séance numéro 10, le 20 avril 2022

#### Un système différentiel linéaire d'ordre deux

On se donne deux nombres réels  $p$  et  $q$ . On cherche à exprimer la solution générale du système différentiel  $\frac{dX}{dt} = A X(t)$  avec la condition initiale  $X(0) = (p, q)^t$  pour  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Quelles sont les valeurs propres de  $A$  ?
- Trouver une matrice de passage  $P$  inversible et une matrice  $\Lambda$  diagonale de sorte que  $A = P \Lambda P^{-1}$ .
- Calculer la matrice inverse  $P^{-1}$ .
- Montrer qu'avec le changement de vecteur inconnu  $Y(t) = P^{-1} X(t)$ , le problème posé peut s'écrire  $\frac{dY}{dt} = \Lambda Y(t)$  avec la condition initiale  $Y(0) = Y_0$ , où  $Y_0$  est un vecteur que l'on précisera.
- Calculer en fonction de  $p$ ,  $q$  et de fonctions élémentaires classiques la solution  $Y(t)$  du problème posé à la question précédente.
- Calculer la solution  $X(t)$  du système dynamique composé de l'équation d'évolution  $\frac{dX}{dt} = A X(t)$  et de la condition initiale  $X(0) = (p, q)^t$ .