le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 10 Intégrale curviligne

- Rappels sur les courbes de l'espace euclidien orienté

On se donne une courbe Γ de l'espace $\mathbb{R}^3$: $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$. La longueur L de l'arc de courbe entre les points $M(a)$ et $M(b)$ est donnée par $L = \int_a^b \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \parallel \mathrm{d}t$. L'abscisse curviligne s est la longueur le long de la courbe. On a $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \parallel \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \parallel$ et la relation "évidente" $L = \int_0^L \mathrm{d}s$.

- Intégrale curviligne

On se donne une fonction f de trois variables $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ que l'on peut considérer en particulier comme définie sur la courbe Γ : $\Gamma \ni M \longmapsto f(M) \in \mathbb{R}$. L'intégrale curviligne $\int_\Gamma f(M(s))\,\mathrm{d}s$ se définit tout d'abord pour la fonction $f(M) \equiv 1$: $\int_\Gamma 1\,\mathrm{d}s = L$, la longueur de l'arc de courbe.

Pour une fonction quelconque, on utilise le paramétrage $[a, b] \ni t \longmapsto M(t) \in \mathbb{R}^3$; on définit l'intégrale curviligne $\int_\Gamma f(M(s))\,\mathrm{d}s$ de la fonction f le long de la courbe Γ par la relation $\int_\Gamma f(M(s))\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(M(t))\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale ordinaire ne dépend pas du paramétrage choisi sur la courbe Γ.

Par exemple, si Γ désigne le quart du cercle centré à l'origine, de rayon R et dans le quadrant $x > 0$, $y > 0$, l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma x\,\mathrm{d}s$ se calcule en paramétrant le cercle par l'angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $I = \int_0^{\pi/2} (R\cos\theta)\,(R\,\mathrm{d}\theta) = R^2$.

- Circulation d'un champ de vecteurs

Un champ de vecteurs Φ est une fonction à valeurs vectorielles définie pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ou une partie de $\mathbb{R}^3$. On a donc $\Phi(x, y, z) = X(x, y, z)\,e_1 + Y(x, y, z)\,e_2 + Z(x, y, z)\,e_3$, relation que l'on peut écrire aussi $\Phi(M) = X(M)\,e_1 + Y(M)\,e_2 + Z(M)\,e_3$. La circulation γ du champ de vecteurs Φ le long de la courbe Γ est égal à l'intégrale curviligne du produit scalaire $(\Phi(x, y, z), \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s})$; on a $\gamma = \int_\Gamma (\Phi(M), \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s})\,\mathrm{d}s = \int_\Gamma (\Phi(M), \mathrm{d}M)$. Cette intégrale peut aussi se calculer en explicitant le produit scalaire : $\gamma = \int_\Gamma (X(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Y(x, y, z)\,\mathrm{d}y + Z(x, y, z)\,\mathrm{d}z)$.

Par exemple à deux dimensions d'espace pour le champ $\Phi(x, y) = x\,e_1 + y\,e_2$ et Γ le demi-cercle centré sur l'origine, de rayon R et tels que $y \geq 0$, on a $(\Phi(M), \mathrm{d}M) = 0$ et la circulation est nulle.

Pour le champ $\widetilde{\Phi}(x, y) = -y\,e_1 + x\,e_2$ le long du même demi-cercle Γ, on a $(\widetilde{\Phi}(M), \mathrm{d}M) = R^2\,\mathrm{d}\theta$ et la circulation est égale à πR^2.

- Rappels de calcul différentiel pour les fonctions de trois variables

On se donne une application ψ définie "au voisinage" de $X \in \mathbb{R}^3$. On dit que ψ est différentiable au point $X \in \mathbb{R}^3$ si il existe une application linéaire tangente $\mathrm{d}\psi(X)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur $H \in \mathbb{R}^3$ associe le nombre $\mathrm{d}\psi(X).H \in \mathbb{R}$ et une application ε qui tend vers zéro

François Dubois, avril 2022.

si la norme de $H \in \mathbb{R}^3$ tend vers zéro de sorte que $\psi(X+H) = \psi(X) + \mathrm{d}\psi(X).H + \|H\|\, \varepsilon(H)$. Localement, la fonction ψ ressemble à une fonction affine.
Si la fonction ψ est différentiable au point X, elle est continue en ce point.
Si la fonction ψ est différentiable au point X, elle a des dérivées partielles $\frac{\partial\psi}{\partial x}(X)$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}(X)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial z}(X)$ et pour $H = h_1\, e_1 + h_2\, e_2 + h_3\, e_3$, on a
$\mathrm{d}\psi(X).H = \frac{\partial\psi}{\partial x}(X)\, h_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}(X)\, h_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}(X)\, h_3$. Cette relation peut s'écrire sous forme condensée comme une égalité de différentielles : $\mathrm{d}\psi(X) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$.
Attention ! Si la fonction ψ de deux variables pour fixer les idées admet des dérivées partielles $\frac{\partial\psi}{\partial x}(X)$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y}(X)$ au point X, elle peut ne pas être continue, comme le montre l'exemple classique $\psi(x, y) = \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\psi(0, 0) = 0$.
Le théorème de dérivation des fonctions composées montre que la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit $f(t) = \psi(x(t), y(t), z(t))$ est dérivable si ψ est différentiable et si les fonctions $t \longmapsto x(t)$, $t \longmapsto y(t)$ et $t \longmapsto z(t)$ sont dérivables. On a alors $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
Cette relation s'obtient formellement à partir de la différentielle
$\mathrm{d}\psi(X) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial\psi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$ et en divisant ensuite formellement par $\mathrm{d}t$.

- Circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel

Dire que le champ de vecteurs Φ dérive du potentiel ψ revient à dire que ses trois composantes sont les dérivées partielles de la fonction ψ: $\Phi(M) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(M)\, e_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y}(M)\, e_2 + \frac{\partial\psi}{\partial z}(M)\, e_3$. On écrit aussi $\Phi(M) = \nabla\psi(M)$, en introduisant le vecteur symbolique gradient
$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\, e_1 + \frac{\partial}{\partial y}\, e_2 + \frac{\partial}{\partial z}\, e_3$. Avec cette hypothèse, la circulation le long de la courbe Γ qui va du point A au point B s'exprime comme une simple différence :
$\int_A^B (\Phi(M), \mathrm{d}M) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\psi(M(s))\,\mathrm{d}s = \int_A^B \mathrm{d}\psi(s) = \psi(B) - \psi(A)$. En effet,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi(x(t), y(t), z(t))) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
De plus, une telle circulation ne dépend pas de la courbe Γ mais seulement des deux points A et B aux extrémités.

- Formes différentielles à deux dimensions d'espace

La notion de forme différentielle permet d'enrichir le cadre mathématique proposé plus haut. On se place ici dans le cas de deux dimensions spatiales pour simplifier l'exposé. Une forme différentielle $\omega = X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y$ peut être vue comme une application linéaire qui dépend du point (x, y): $\omega.H = X(x, y)\, h_1 + Y(x, y)\, h_2$ si $H = h_1\, e_1 + h_2\, e_2$.
Par exemple, $\omega = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle qui correspond au choix $X(x, y) = y$ et $Y(x, y) = x$.
Surtout, si on pose $\Phi(x, y) = X(x, y)\, e_1 + Y(x, y)\, e_2$, on peut écrire aussi $\omega = (\Phi(M), \mathrm{d}M)$ et l'intégrale de contour $\int_\Gamma \omega$ est en fait une intégrale curviligne.
Une forme différentielle est exacte si et seulement si il existe une fonction différentiable ψ telle que $\omega = \mathrm{d}\psi$. En d'autres termes, $X = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ et $Y = \frac{\partial\psi}{\partial y}$: le champ de vecteurs Φ dérive du potentiel ψ. Alors $\int_A^B \omega = \psi(B) - \psi(A)$. Si la courbe Γ est fermée, c'est à dire si $B = A$, alors $\oint \omega \equiv \int_\Gamma \omega = 0$. Si une forme différentielle est exacte et la fonction ψ assez régulière, alors le théorème de Schwarz d'échange des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial\psi}{\partial y}\big) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\big)$ entraîne $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$
Une forme différentielle $\omega = X(x, y)\,\mathrm{d}x + Y(x, y)\,\mathrm{d}y$ est fermée si et seulement si $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ en

tout point où les fonctions X et Y sont définies. Le résultat précédent exprime que si une forme différentielle est exacte, alors elle est fermée.

- Une forme différentielle célèbre

Pour (x, y) différent de $(0, 0)$, on pose $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$. Cette forme différentielle est fermée : $\frac{\partial}{\partial y}\big(-\frac{y}{x^2+y^2}\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{x}{x^2+y^2}\big)$. Elle n'est pas exacte car lorsqu'on l'intègre le long d'un cercle de rayon R centré sur l'origine, on trouve $\oint \omega = 2\pi$. Pourtant, si on introduit l'angle θ des coordonnées polaires du plan, c'est à dire tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a $\tan\theta = \frac{y}{x}$. On différentie cette relation et on obtient après une ligne de calcul $\mathrm{d}\theta = \omega$. L'apparente contradiction vient du fait que l'angle θ n'est pas une fonction définie sur le plan $\mathbb{R}^2$ tout entier. La relation $\omega = \mathrm{d}\theta$ reste locale et l'intégrale curviligne $\oint \omega$ peut être non nulle si la courbe le long de laquelle on intègre tourne autour de l'origine.

- Flux d'un champ de vecteurs dans le cas de deux dimensions spatiales

Pour une courbe plane, le vecteur tangent $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,e_1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,e_2$ est de norme unité et le vecteur normal n est obtenu en le faisant tourner d'un angle $+\frac{\pi}{2}$: $n = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,e_1 + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,e_2$. Le flux φ du champ de vecteurs $\Phi(M) = X(M)\,e_1 + Y(M)\,e_2$ est l'intégrale curviligne du produit scalaire $(\Phi(M), n)$. On a $\varphi = \int_\Gamma (\Phi(M), n)\,\mathrm{d}s$, intégrale qu'on peut écrire également $\varphi = \int_\Gamma (-X\,\mathrm{d}y + Y\,\mathrm{d}x)$.

Par exemple, le flux du champ $\Phi = x\,e_1 + y\,e_2$ le long du cercle de centre l'origine et de rayon R est égal à $-2\pi R^2$.

- Choix d'orientation de la normale

Avec l'exemple précédent, le champ de vecteurs Φ est "sortant" du cercle de centre O et de rayon R alors que la normale n est "entrante" et pointe dans la direction exactement opposée. On choisit donc souvent une autre convention pour le signe du vecteur normal, dite de la "normale extérieure". Pour l'exemple précédent, le flux change de signe et devient positif.

- Variation du vecteur tangent dans un changement de coordonnées

On se donne une application régulière ψ qui transforme le plan $\mathbb{R}^2$ en un autre plan euclidien que l'on note encore $\mathbb{R}^2$ ici pour fixer les idées :
$\mathbb{R}^2 \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \longmapsto \psi(\widehat{x}, \widehat{y}) = X(\widehat{x}, \widehat{y})\,e_1 + Y(\widehat{x}, \widehat{y})\,e_2 \in \mathbb{R}^2$. On peut considérer cette appllication ψ comme un changement non linéaire de coordonnées. Un point $\widehat{M}$ d'une courbe $\widehat{\Gamma}$ se transforme en $M = \psi(\widehat{M}) \in \psi(\widehat{\Gamma}) = \Gamma$. Alors la direction tangente $\widehat{\tau} = \frac{\mathrm{d}\widehat{M}}{\mathrm{d}\widehat{s}}$ le long de $\widehat{\Gamma}$ se transforme avec l'aide de la différentielle $\mathrm{d}\psi(\widehat{M})$ du changement de coordonnées ψ et devient une direction colinéaire à $\mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\widehat{\tau}$ tangente à la courbe Γ. Le vecteur tangent τ le long de la courbe image Γ est à la fois colinéaire à $\mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\widehat{\tau}$ et de norme unité : $\tau = \frac{\mathrm{d}\widehat{s}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\widehat{\tau}$.

On a en effet $\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\psi(\widehat{M}) = \mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\frac{\mathrm{d}\widehat{M}}{\mathrm{d}s} = \mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\frac{\mathrm{d}\widehat{M}}{\mathrm{d}\widehat{s}}\,\frac{\mathrm{d}\widehat{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\widehat{s}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\psi(\widehat{M}).\,\widehat{\tau}$. □

- Variation du vecteur normal dans un changement de coordonnées

Le vecteur normal n s'obtient en tournant le vecteur tangent τ d'un angle $\frac{\pi}{2}$. Si on note $J = \det(\mathrm{d}\psi(\widehat{M}))$ le déterminant de la différentielle de ψ, on a $\widehat{n} = \frac{1}{J}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\widehat{s}}(\mathrm{d}\psi(\widehat{M})^{\mathrm{t}}.\,n)$ et cette relation est valable quelle que soit la convention d'orientation de la normale.

En effet, on a une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ entre τ et n: $n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\tau$ et une rotation identique entre les vecteurs $\hat{\tau}$ et $\hat{n}$: $\hat{n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{\tau}$. Compte tenu de la relation $\hat{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat{s}} \mathrm{d}\psi^{-1}(\widehat{M}) . \tau$ vue plus haut, on en déduit $\hat{n} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat{s}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\psi^{-1}(\widehat{M}). \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} n$. Si $\mathrm{d}\psi(\widehat{M}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{d}\psi^{-1}(\widehat{M}) = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, avec $J = \det(\mathrm{d}\psi(\widehat{M}))$. On en déduit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\psi^{-1}(\widehat{M}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \mathrm{d}\psi(\widehat{M})^{\mathrm{t}}$$

et le résultat $\hat{n} = \frac{1}{J} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\hat{s}} (\mathrm{d}\psi(\widehat{M})^{\mathrm{t}} . n)$ est établi. □

Exercices

• Arc de parabole

On se donne dans le plan euclidien la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(-1, 1)$ et $B(2, 4)$ sur cette parabole.

Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_A^B (xy \, \mathrm{d}x + (x + y) \, \mathrm{d}y)$. $\left[\frac{69}{4}\right]$

• Demi-cercle

Dans le plan euclidien, on considère le demi-cercle Γ de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et tel que $y \geq 0$.

Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma ((x - y) \, \mathrm{d}x + (x + y) \, \mathrm{d}y)$. $[\pi R^2]$

• Demie ellipse

On se donne $a > 0$ et $b > 0$. Dans le plan euclidien, on considère la demie ellipse Γ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ telle que $y \geq 0$ qui permet d'aller du point A de coordonnées $(a, 0)$ au point B de coordonnées $(-a, 0)$. On se donne aussi le champ de vecteurs $\Phi(x, y) = -y e_1 + x e_2$.

a) Calculer la circulation $I = \int_\Gamma (\Phi, \mathrm{d}M)$ du champ de vecteurs Φ le long de la demie ellipse Γ. $[\pi a b]$

b) Montrer que le flux $\varphi = \int_\Gamma (\Phi, n) \, \mathrm{d}s$ du même champ de vecteurs le long de la même demie ellipse, peut s'écrire $\varphi = \int_A^B (y \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}x)$.

c) Calculer ce flux. $[0]$

• Demie cardioïde

On se donne $a > 0$ et dans le plan euclidien, la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos\theta)$ en coordonnées polaires. On introduit aussi la forme différentielle $\omega = (x + y) \, \mathrm{d}x + (x - y) \, \mathrm{d}y$.

a) Etudier et dessiner cette cardioïde. On précisera en particulier la tangente au point d'angle π et de rayon vecteur $\rho(\pi)$.

b) Montrer que la forme différentielle ω est fermée.

c) Montrer que la forme différentielle ω est exacte, c'est à dire qu'il existe une application différentiale ψ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ de sorte que $\omega = \mathrm{d}\psi$.

d) Préciser une valeur possible pour la fonction ψ. $[\psi(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + xy - \frac{1}{2} y^2]$

On se donne l'origine O et le point A qui correspondent respectivement aux points de la cardioïde de paramètres $\theta = \pi$ et $\theta = 0$.

e) Quelles sont les coordonnées cartésiennes des points O et A ?

f) Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathrm{O}}^{A} \omega$. $[-2a^2]$

g) Cette intégrale dépend-elle de la courbe qui relie les points O et A ?

- Circulation le long d'une hélice circulaire

On se donne $R > 0$ et $a > 0$. On suppose l'arc d'hélice circulaire Γ paramétrée de sorte que $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$ et $z = a\theta$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. On se donne la forme différentielle $\omega = (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$.

a) Vérifier que la forme ω n'est pas fermée, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction $\psi(x,y,z)$ de sorte que $\omega = \mathrm{d}\psi$.

b) Calculer la circulation $I = \int_{\Gamma} \omega$ de la forme ω le long de l'arc d'hélice Γ.

$[-2\pi R(R+a)]$