le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 7 Longueur, surface, volume

- Longueur

On se place dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}_3$ de dimension trois sur $\mathbb{R}$. L'espace vectoriel euclidien associé est noté E_3. On suppose qu'une repère orthonormée $(O\,; e_1, e_2, e_3)$ est donné. La distance AB entre les points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) est calculée grâce au théorème de Pythagore :
$AB = \| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Distance d'un point à un plan affine

On se donne un plan affine $\mathscr{P}$ d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$, où le triplet (a, b, c) n'est pas identiquement nul : $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors le plan vectoriel associé P a pour équation $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ et le vecteur n de coordonnées (a, b, c) est normal au plan $\mathscr{P}$. En effet, tout vecteur $v \in P$ de coordonnées (x, y, z) est orthogonal à n puisque le produit scalaire
$(v, n) = a\,x + b\,y + c\,z$ est nul.
On se donne également un point A de coordonnées (X, Y, Z). On cherche à minimiser la distance entre le point A et les divers points $M \in \mathscr{P}$, c'est à dire à déterminer la borne inférieure $\inf\{AM, M \in \mathscr{P}\}$. Cette borne inférieure est en fait un minimum : cette distance est atteinte au point H, intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite normale au plan $\mathscr{P}$, dirigée par le vecteur n, qui passe par le point A : pour tout point $M \in \mathscr{P}$, $AH \leq AM$. On trouve les coordonnées du point H en écrivant ces deux conditions et il vient après quelques lignes de calcul $AH = \frac{|aX+bY+cZ+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

- Longueur d'un arc de cercle

On sait que l'angle θ représente la longueur de l'arc mesurée sur le cercle unité. Pour un cercle de rayon $R > 0$, cette longueur $L(\theta)$ vaut $R\,\theta$.

- Espace vectoriel euclidien orienté

Les transformations orthogonales T de l'espace vectoriel euclidien E_3 satisfont à la conservation du produit scalaire : $(Tx, Ty) = (x, y)$ pour tout couple x, y de vecteurs de E_3. On sait qu'alors $T\,T^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}}\,T = \mathrm{id}$. En conséquence, $\det T = \pm 1$. Si $\det T = 1$, on dit que la transformation orthogonale T est une rotation. Dans le cas où $\det T = -1$, la transformation orthogonale T modifie l'orientation.
Une transformation orthogonale transforme toute base orthonormée (e_1, e_2, e_3) en une nouvelle base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Réciproquement, si on se donne deux bases orthonormées (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, il existe une unique transformation orthogonale T telle que $T e_j = \varepsilon_j$ pour $j = 1, 2, 3$. La question est de savoir si $\det T = 1$ ou si $\det T = -1$. Dans le premier cas, on dit que les deux bases sont de même orientation ; dans le second, on dit que les deux bases sont d'orientations contraires.

François Dubois, mars 2022.

On oriente l'espace euclidien E_3 en choisissant une base orthonormée (e_1, e_2, e_3). On décide que cette base est d'orientation directe. Alors toutes les bases $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ issues de (e_1, e_2, e_3) dans une rotation R arbitraire, c'est à dire $R e_j = \varepsilon_j$ pour $j = 1, 2, 3$ avec
$R R^{\mathrm{t}} = R^{\mathrm{t}} R = \mathrm{id}$ et $\det R = 1$, sont d'orientation directe. Les autres bases $(\widetilde{\varepsilon_1}, \widetilde{\varepsilon_2}, \widetilde{\varepsilon_3})$ issues de (e_1, e_2, e_3) par une transformation orthogonale T de déterminant égal à -1 sont dites rétrogrades ou indirectes.

- Surface d'un parallélogramme plan

Il est supposé connu ici que la surface d'un parallélogramme plan est égale à sa longueur multipliée par sa hauteur.
Mais si on se définit le quadrilatère $0ACB$ à l'aide des coordonnées (a, b) du point A et (c, d) du point D, comment exprimer la surface de ce quadrilatère en fonction des quatre nombres a, b, c et d ?

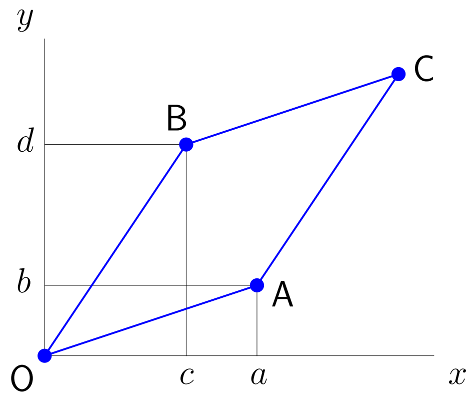

Figure 1. Calcul de la surface du triangle OAB

On fait un dessin (Figure 1) et on calcule la surface du triangle OAB, c'est à dire la demi-surface du quadrilatère à l'aide de surfaces de triangles rectangles et de trapèzes rectangles. On a finalement : surface $(OAB) = |\frac{1}{2} c\, d + (a-c)\, \frac{b+d}{2} - \frac{1}{2} a\, b| = \frac{1}{2} |a\, d - b\, c|$. L'aire du parallélogramme $0ACB$ est donc donnée par la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$. On a la relation :

surface $(OACB) = \mathrm{abs} \left[\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix} \right]$.

Si maintenant le parallélogramme est dans un plan quelconque de l'espace, la remarque fondamentale est que sa surface est inchangée si on lui fait subit une rotation.

- Produit vectoriel de deux vecteurs dans un plan horizontal

On se place dans l'espace vectoriel euclidien E_3 de dimension trois et on se donne une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3). Pour deux vecteurs u et v dans le plan horizontal engendré par e_1 et e_2, le produit vectoriel va permettre de mesurer la surface $\mathrm{surf}(P_{uv})$ du parallélogramme $P_{uv} = \{\theta\, u + \xi\, v, 0 \leq \theta, \xi \leq 1\}$.

Si $u = x_u\, e_1 + y_u\, e_2$ et $v = x_v\, e_1 + y_v\, e_2$, on pose $u \times v = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} e_3$.

Compte tenu du paragraphe précédent, on a $\mathrm{surf}(P_{uv}) = ||\, u \times v\, ||$.

On remarque que les vecteurs u et v sont liés si et seulement si $u \times v = 0$.
On a également $v \times u = -u \times v$ et $e_1 \times e_2 = e_3$.
De plus, l'application $< e_1, e_2 > \times < e_1, e_2 > \ni (u, v) \longmapsto u \times v \in E_3$ est bilinéaire.

- Produit vectoriel de deux vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté

On étend la définition précédente au produit vectoriel $u \times v$ de deux vecteurs de E_3 de façon que $E_3 \times E_3 \ni (u, v) \longmapsto u \times v \in E_3$ soit bilinéaire. De plus, on suppose que le produit vectoriel est invariant par rotation : pour toute rotation R de l'espace orienté E_3, on impose la relation $Ru \times Rv = R(u \times v)$.
Avec le choix d'une rotation R telle que $Re_1 = e_2$, $Re_2 = e_3$ et $Re_3 = e_1$, on obtient immédiatement $e_2 \times e_3 = e_1$ et $e_3 \times e_2 = -e_1$. En utilisant à nouveau cette même rotation, on obtient $e_3 \times e_1 = e_2$ et $e_1 \times e_3 = -e_2$.
Les relations précédentes et la bilinéarité permettent d'expliciter complètement le vecteur $u \times v$ dans le cas général où $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$:
$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3$. Il est parfois utile d'écrire formellement cette expression $u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix}$.
On vérifie alors les propriétés établies pour le cas du plan : les vecteurs u et v sont liés si et seulement si $u \times v = 0$, on a l'anticommutation $v \times u = -u \times v$ et l'application $E_3 \times E_3 \ni (u, v) \longmapsto u \times v \in E_3$ est bilinéaire. De plus, le produit vectoriel $u \times v$ est toujours orthogonal à chacun des vecteurs u et v : $(u, u \times v) = 0$ et $(v, u \times v) = 0$.
Enfin, la surface $\mathrm{surf}(P_{uv})$ du parallélogramme $P_{uv} = \{\theta u + \xi v, 0 \leq \theta, \xi \leq 1\}$ est égale à la norme du produit vectoriel $u \times v$: $\mathrm{surf}(P_{uv}) = || u \times v ||$.

- Produit mixte de trois vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté

On se donne trois vecteurs u, v et w de l'espace vectoriel euclidien orienté E_3. On définit le produit mixte (u, v, w) comme le produit scalaire du vecteur $u \times v$ par le vecteur w. C 'est un nombre tel que : $(u, v, w) = (u \times v, w)$.
Si on se donne les coordonnées de ces trois vecteurs dans une base orthonormée directe, on a après un calcul directement conséquence du paragraphe précédent $(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$.
Les propriétés du déterminant permettent alors d'établir que le produit mixte (u, v, w) est nul si et seulement si les trois vecteurs u, v et w forment une famille liée dans E_3. L'échange de deux colonnes conduit à toute une série d'identités : $(v, u, w) = -(u, v, w)$, $(u, w, v) = -(u, v, w)$, $(w, v, u) = -(u, v, w)$, $(v, w, u) = (w, u, v) = (u, v, w)$.
Enfin, un parallélipipède est un hexaèdre dont les six faces sont des parallélogrammes parallèles deux à deux. Si on se donne trois vecteurs u, v et w de E_3, on appelle $H_{uvw} = \{\xi u + \eta v + \zeta v, 0 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1\}$ le parallélipipède engendré par ces trois vecteurs. Son volume est bien entndu égal à la surface d'une de ses faces multipliée par la hauteur correspondante. C'est aussi la valeur absolue du produit mixte des trois vecteurs u, v et w : $\mathrm{vol}(H_{uvw}) = |(u, v, w)|$.

Exercices

• Surface d'un secteur angulaire d'angle donné

On se donne un cercle de centre O et de rayon $R > 0$. On se donne deux demi-droites issues de l'origine et faisant entre elles un angle θ. On note $S(\theta)$ le secteur angulaire intersection du disque de centre O et de rayon R et de la zone du plan comprise entre les deux demi-droites. Quelle est la surface de $S(\theta)$?

• Volume d'un cylindre oblique [Cavalieri, 1598-1647]

On se donne un cylindre de rayon R et une direction fixe d qui fait un angle α avec la verticale. On aligne l'axe du cylindre avec la direction d. On considère le cylindre tronqué C défini par l'intersection de la surface décrite ci-dessus et la région entre deux plans horizontaux de cotes $z = 0$ et $z = h > 0$.

a) Quel est le volume du cylindre tronqué C ?

b) Quel est la surface du bord ∂C du cylindre tronqué ?

c) Reprendre les deux questions précédentes pour une surface horizontale de forme arbitraire de surface S et de périmètre p.

• Volume d'un tronc de cône

On se donne une surface horizontale S et un point A situé à une hauteur $h > 0$ au dessus de ce plan. Le cône C est formé de toutes les demi-droites qui passent par le point A et par les points de la surface S.

a) On se donne Z tel que $0 \leq Z \leq h$. On coupe le tronc de cône par un plan horizontal d'équation $z = Z$. Quelle est a surface $S(Z)$ de l'intersection entre ce plan horizontal et le tronc de cône ?

b) En s'aidant d'une relation qui exprime qu'un volume est l'intégrale d'une surface le long d'une direction normale, calculer le volume du tronc de cône précédent.

c) Quel est le volume d'une pyramide carrée de côté a et de hauteur h ?

• Volume d'un tétrèdre

On se donne le tétraèdre (O, A, B, C) et on le suppose non dégénéré.

a) A l'aide de l'exercice précédent, donner une expression de son volume en le considérant comme un cône qui s'appuie sur une de ses bases triangulaires.

b) Modifier l'expression trouvée à la question précédente en introduisant la norme d'un produit vectoriel.

c) Exprimer le volume du tétraèdre (O, A, B, C) en fonction du produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

• Surface d'un tronc de cône

On se donne un tronc de cône droit qui s'appuie du surface horizontale circulaire de rayon $R > 0$. Il a une hauteur $h > 0$. Quelle est sa surface ?