le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 4 Espace euclidien

- Produit scalaire

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie ou pas. Un produit scalaire est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout couple de vecteurs de E associe le nombre (x, y), produit scalaire de x et de y. Un produit scalaire vérifie les propriétés suivantes :

(i) forme bilinéaire : $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2, y \in E$
et $(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 (x, y_1) + \lambda_2 (x, y_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x, y_1, y_2 \in E$

(ii) forme symétrique : $(x, y) = (y, x)$, $\forall x, y \in E$

(iii) forme définie positive : $(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$ et $\big((x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big)$.

Muni du produit scalaire $(\ ,\ )$, l'espace vectoriel E est noté $\big(E, +, ., (\ ,\ )\big)$: c'est un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ par $y = (y_1, \ldots, y_n)$ est défini par la relation $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$.

Si $a < b$ sont deux nombres réels, et $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ est l'espace des applications continues de l'intervalle fermé $[a, b]$ à valeurs réelles, le produit scalaire usuel de deux fonctions f et g est défini par la relation $(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

- Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Par définition, la norme euclidienne $||x||$ est le nombre positif défini par $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.
Une norme est une fonction homogène de degré 1. Précisément, on a : $||\lambda\, x|| = |\lambda|\ ||x||$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour deux vecteurs arbitraires de l'espace euclidien E, on a $|(x, y)| \leq ||x||\ ||y||$.
Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a l'égalité $|(x, y)| = ||x||\ ||y||$ si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.

- Inégalité triangulaire

On a, pour tous les vecteurs x et y de l'espace euclidien E, l'inégalité suivante :
$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a la relation d'homogénéité $||\lambda\, x|| = |\lambda|\ ||x||$ et l'égalité a zéro de la norme entraîne l'égalité à zéro du vecteur : $||x|| = 0 \Longrightarrow x = 0$.
La norme définit une distance au sens de la topologie générale, *via* la relation $\mathrm{d}(x, y) = ||x - y||$.
Si x et y sont tous les deux non nuls, l'angle $\theta \in [0, \pi]$ entre les vecteurs x et y est défini par la relation $\cos\theta = \frac{(x, y)}{||x||\,||y||}$.

François Dubois, mars 2022.

- Théorème de Pythagore

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire (x, y) est nul. Si $(x, y) = 0$, alors $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

- Sous-espaces orthogonaux

On se donne deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de l'espace vectoriel euclidien E. On dit que les deux sous-espaces sont orthogonaux, et on note $F_1 \perp F_2$ lorsque $(x_1, x_2) = 0$ pour tout $x_1 \in F_1$ et tout $x_2 \in F_2$.

- Orthogonal d'une partie non vide

On se donne un sous ensemble non vide F de l'espace vectoriel euclidien E : $F \subset E$. On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ le sous-espace vectoriel de E [exercice !] des vecteurs y de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs $x \in F$: $F^\perp = \{y \in E, \forall x \in F, (x, y) = 0\}$.

- Décomposition orthogonale d'un espace euclidien de dimension finie

Si l'espace vectoriel euclidien E est de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, les deux espaces F et $F^\perp$ fournissent une décomposition $E = F \oplus_\perp F^\perp$ de l'espace en deux sous-espaces supplémentaires F et $F^\perp$ qui sont de plus orthogonaux.
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$.
Si E est de dimension n et F de dimension p, alors $F^\perp$ est de dimension $n - p$.

- Projecteur orthogonal

Si l'espace vectoriel euclidien E est de dimension finie et si F est un sous-espace vectoriel de E, on considère la décomposition orthogonale $E = F \oplus_\perp F^\perp$ précédente, avec l'écriture unique $x = y + z$ de tout vecteur $x \in E$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Avec ces notations, la projection orthogonale P de E sur F est définie par $Px = y$ pour tout $x \in E$. C'est une application linéaire de E dans E : $P \in \mathscr{L}(E)$. Son noyau est égal à $F^\perp$: $\mathrm{Ker}\, P = F^\perp$ et son image est égale à F : $\mathrm{Im}\, P = F$.

- Base orthonormée

On suppose l'espace vectoriel euclidien E de dimension finie $n \geq 1$. On se donne une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On dit que cette base est orthogonale si les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux : $i \neq j \Longrightarrow (e_i, e_j) = 0$.
Si de plus tous les vecteurs e_j sont normés, c'est à dire $||e_j|| = 1$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est dite orthonormée.
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique.
On se donne un entier $N \geq 1$ et on appelle P_N l'espace des polynômes trigonométriques. Ce sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$. La famille de fonctions $(1, \cos(kx), \sin(kx), k = 1, \ldots, N)$ forme une famille orthogonale pour le produit scalaire $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

- Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Dans l'espace euclidien E de dimension finie n, on se donne une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. On peut orthogonaliser cette base et fabriquer une base orthogonale de sorte que pour tout $k = 1, \ldots, n$, $e_k \in < \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k >$, espace engendré par les k premiers vecteurs de la base initiale.

On pose d'abord $e_1 = \varepsilon_1$. Puis, hypothèse de récurrence, on suppose donnés les k premiers vecteurs $e_1, \dots, e_k$ de la base orthogonale de sorte que $< e_1, \dots, e_k > = < \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k >$. On a $(e_j, e_j) \neq 0$ si $1 \leq j \leq k$ et $(e_j, e_\ell) = 0$ pour $1 \leq j, \ell \leq k$. On pose $e_{k+1} = \varepsilon_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j$. L'orthogonalite $(e_{k+1}, e_\ell) = 0$ si $1 \leq \ell \leq k$ permet un calcul de α_ℓ. On a $\alpha_\ell = -(\varepsilon_{k+1}, e_\ell)/(e_\ell, e_\ell)$. De plus, $e_{k+1} \neq 0$ par construction car la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ est libre. Enfin, on a l'égalité des sous espaces $< e_1, \dots, e_{k+1} >$ et $< \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1} >$.

• Forme quadratique

On se donne un espace vectoriel E. Une forme quadratique q sur E est une application de E à valeurs réelles : $q(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. Par définition, une forme quadratique q satisfait les deux propriétés suivantes :

(i) forme bilinéaire sous-jacente.

L'application b de $E \times E$ à valeurs réelles définie par $b(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ est bilinéaire : $b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 b(x_1, y) + \lambda_2 b(x_2, y)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2, y \in E$

et $b(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 b(x, y_1) + \lambda_2 b(x, y_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall x, y_1, y_2 \in E$

(ii) homogénéité : $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in E$.

Alors la forme bilinéaire b, également appelée forme polaire relative à la forme quadratique q, est symétrique : $b(x, y) = b(y, x)$ pour tout $x, y \in E$ et $\forall x \in E$, $b(x, x) = q(x)$ [exercice !].

Une forme quadratique sur un espace vectoriel E est une généralisation de la notion de "norme au carré", mais sans s'imposer qu'un carré doive être nécessairement positif.

Trois exemples pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on pose $q_1(X) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $q_2(X) = x^2 - y^2$, $q_3(X) = xy$.

• Expression matricielle d'une forme quadratique

On suppose l'espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$ muni d'une forme quadratique q. On note b la forme polaire associée. On se donne une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et on pose $Q_{ij} = b(e_i, e_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Alors la matrice $Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi définie est symétrique et pour des vecteurs arbitraires $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, On a $b(x, y) = X^{\mathrm{t}} Q Y$ avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$. En particulier, $q(x) = X^{\mathrm{t}} Q X$.

• Changement de base dans l'expression matricielle d'une forme quadratique

Si on passe d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E à une nouvelle base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, les coordonnées X de $x = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell e_\ell$ se transforment en $\widetilde{X}$ dans la nouvelle base : $x = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{x}_j \varepsilon_j$. On a $X = P\widetilde{X}$, où P est la matrice de passage qui définit ε_j en fonction des e_ℓ: $\varepsilon_j = \sum_{\ell=1}^{n} P_{\ell j} e_\ell$. Alors il en est de même pour un second vecteur y: $Y = P\widetilde{Y}$. Quand on injecte ces relations dans la relation $b(x, y) = X^{\mathrm{t}} Q Y$, il vient $b(x, y) = \widetilde{X}^{\mathrm{t}} \widetilde{Q} \widetilde{Y}$ avec $\widetilde{Q} = P^{\mathrm{t}} Q P$. On observe donc qu'une forme quadratique ne se transforme pas de la même façon qu'une application linéaire dans un changement de base.

• Sommes de carrés

On se donne une forme quadratique q sur un espace de dimension finie E. Il existe un changement linéaire de coordonnées $X \longmapsto \widetilde{X}$ avec $X = P\widetilde{X}$ comme plus haut et des coefficients réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de façon que $q(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\widetilde{x}_j)^2$. On dit qu'on a décomposé la forme quadratique q en somme de carrés

Par exemple, la forme $q_3(X) = xy$ sur $\mathbb{R}^2$ proposée plus haut peut s'écrire $q_3(X) = \frac{1}{4}\,(x+y)^2 - \frac{1}{4}\,(x-y)^2$, ce qui correspond à une matrice de passage $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, soit $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que $\widetilde{Q} = P^{\mathrm{t}} Q P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

• Méthode de Gauss

La méthode de Gauss permet d'aboutir à la décomposition de la forme quadratique q en somme de carrés par un algorithme simple. On considère la première variable x_1 et on note les autres $y = (x_2, \ldots, x_n)$. On suppose dans ce paragraphe que le coefficient α du terme en x_1^2 est non nul : $\alpha \neq 0$. On peut donc écrire la forme quadratique en la considérant comme un polynôme du second degré en x_1 : $q(x) = \alpha\, x_1^2 + (b_2 x_2, \ldots, b_n x_n)\, x_1 + q'(y)$. L'expression $q'(y)$ contient tous les termes de la forme quadratique q qui ne contiennent pas x_1 ; c'est une forme quadratique relative aux variables $x_2, \ldots, x_n$. On écrit alors le polynôme alors $\alpha\, x_1^2 + (b_2 x_2, \ldots, b_n x_n)\, x_1$ comme le début d'un carré :

$$\alpha x_1^2 + (b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)\, x_1 = \alpha\,\Big[\big(x_1 + \tfrac{1}{2\alpha}\,(b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)\big)^2 - \tfrac{1}{4\,\alpha^2}\,(b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)^2\Big].$$

On a alors $q(x) = \alpha\,\big(x_1 + \frac{1}{2\alpha}\,(b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)\big)^2 + q''(y)$ et on recommence le processus avec $q''(y) = q'(y) - \frac{1}{4\alpha}\,(b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n)^2$ qui contient une variable de moins.

Un exercice est proposé plus bas sur l'utilisation de la méthode de Gauss en dimensions deux et trois.

Exercices

• L'orthogonal est un sous-espace vectoriel

On se donne un espace vectoriel euclidien E et une partie non vide F de E : $F \subset E$ et $F \neq \emptyset$. L'orthogonal $F^\perp$ de F est défini par $F^\perp = \{y \in E, \forall x \in F, (x, y) = 0\}$.

Démontrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

• Quelques orthogonaux en dimension trois

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose $v_1 = (1, -1, 1)$ et $v_2 = (2, 3, 4)$.

a) Quels sont les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, v_1) = 0$?

b) Quels sont les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, v_2) = 0$?

c) Quels sont les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $(x, v_1) = 0$ et $(x, v_2) = 0$?

• Projecteur orthogonal sur un plan vectoriel en dimension trois

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ si $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On introduit le sous-espace Q des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

a) Préciser une base de Q.

b) Quelle est la dimension de Q ?

c) Montrer que l'orthogonal $Q^\perp$ de Q est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension un.

d) Préciser une base de $Q^\perp$.
e) Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, quelle est l'expression de sa décomposition sous la forme $x = y + z$ avec $y \in Q$ et $z \in Q^\perp$?
f) Si $x \in \mathbb{R}^3$, quelle est l'expression de sa projection orthogonale Px sur l'espace Q ?
g) Quelle est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice du projecteur orthogonal P sur le sous-espace Q ?

• Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$
On se donne $\varepsilon_1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$, $\varepsilon_2 = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$ et $\varepsilon_3 = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$.
a) Vérifier que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Appliquer le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire $e_1 = \varepsilon_1$ puis e_2 orthogonal à e_1 appartenant au sous-espace $< \varepsilon_1, \varepsilon_2 >$ engendré par ε_1 et ε_2.
c) Appliquer à nouveau le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour construire e_3 orthogonal à e_1 et e_2. $[e_2 = \frac{1}{3}(2, -1, -1), e_3 = \frac{1}{2}(0, 1, -1).]$

• Produit scalaire dans l'espace des matrices carrées
On se donne un entier $n \geq 1$ et on appelle $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour $A = (A_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{tr} A = \sum_{j=1}^n A_{jj}$. Ce nombre est appelé "trace" de la matrice A.
a) Montrer que la trace est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ deux matrices de $\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{t}} B)$.
b) Quelle est l'expression algébrique de (A, B) en fonction des coefficients des matrices A et B ?
c) Montrer que (A, B) définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Polynômes de Legendre
On se place dans l'espace E des polynômes sur le corps des réels. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note p_k la fonction puissance de degré k: $p_k(x) = x^k$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On note aussi P_N le sous-espace de E des polynômes de degré inférieur ou égal à N. On introduit, pour $p, q \in E$, le nombre (p, q) défini par la relation $(p, q) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x$.
a) Calculer (p_0, p_0), (p_0, p_1), (p_1, p_1), (p_0, p_2), (p_1, p_2) et (p_2, p_2).
b) Montrer que (p, q) définit bien un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.
c) Montrer que la famille p_0, p_1 est orthogonale.
d) Est-ce encore le cas pour la famille (p_0, p_1, p_2) ?
e) Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt pour transformer la famille (p_0, p_1, p_2) en une base orthogonale de P_2.
f) Reprendre les questions précédentes en se plaçant dans l'espace P_3 des polynômes de degrés inférieur ou égal à trois.
g) La famille de polynômes obtenue à partir de la famille p_k des fonctions puissances et le procédé d'orthogonalisation de Schmidt définit la famille des polynômes de Legendre. Vérifiez dans la littérature mathématique ou sur un site internet sérieux les résultats que vous avez obtenus aux questions e) et f).

• Expression matricielle d'une forme quadratique

On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Pour $X^{\rm t} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q_1(X) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $q_2(X) = x^2 - y^2$, $q_3(X) = xy$.

a) Déterminer les formes polaires $b_j(X, Y)$ pour $X = (x, y)^{\rm t} \in \mathbb{R}^2$, $Y = (z, t)^{\rm t} \in \mathbb{R}^2$ et $j = 1, 2, 3$.

b) En déduire les matrices symétriques deux par deux Q_j de sorte que $b_j(X, Y) = X^{\rm t} Q_j Y$.

c) Pour quelles formes quadratiques q_j est-il possible d'avoir $q_j(X) < 0$ avec $X \in \mathbb{R}^2$ non nul ?

• Ecriture matricielle de quelques formes quadratiques

On définit dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ selon les cas les formes quadratiques suivantes : $q_1(x, y) = 2x^2 - 8xy + 5y^2$, $q_2(x, y) = xy - 4y^2$, $q_3(x, y, z) = x^2 + xy - 3xz$.

Ecrire chacune des formes quadratiques q_j (pour $j = 1,\ 2,\ 3$) sous la forme $q_j(X) = X^{\rm t} Q_j X$ avec $X = (x, y)^{\rm t}$ ou $X = (x, y, z)^{\rm t}$ selon les cas et Q_j une matrice symétrique que l'on précisera.

• Utilisation de la méthode de Gauss

a) Montrer à l'aide de la méthode de Gauss qu'on peut décomposer la forme quadratique $q_1(x, y) \equiv x^2 - xy$ sous la forme d'une "somme de deux carrés" : $q_1(x, y) = \big(x - \frac{y}{2}\big)^2 - \frac{y^2}{4}$.

b) Même question avec $q_2(X) = X^{\rm t} Q_2 X$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ si $X = (x, y)^{\rm t}$.

c) Même question en dimension trois avec $q_3(x, y, z) \equiv x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x\,z - yz + 2z^2$. Montrer qu'on obtient $q_3(x, y, z) = (x - y + 2z)^2 - \big(2y - \frac{3}{4} z\big)^2 - \frac{23}{16} z^2$.

d) Même question avec $q_4(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - yz + z^2$.

e) Même question avec $q_5(X) = X^{\rm t} Q_4 X$ et $Q_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ si $X = (x, y, z)^{\rm t}$.

• Somme de carrés pour une forme quadratique sans carrés

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ des vecteurs $X = (x, y, z)$ de son produit scalaire canonique et on pose $q(x, y, z) \equiv xy + yz + zx$.

a) Quelle est la matrice symétrique Q qui permet d'écrire la forme quadratique q sous la forme $q(x) = X^{\rm t} Q X$?

b) Montrer que cette matrice admet -1 comme valeur propre double.

c) Montrer qu'on peut diagonaliser la matrice Q dans une base orthonormée ; la matrice de passage P vérifie alors $P^{-1} = P^{\rm t}$.

d) Montrer que dans cette nouvelle base, on peut écrire $q(x) = \widetilde{X}^{\rm t} \widetilde{Q} \widetilde{X}$ avec $\widetilde{Q}$ matrice diagonale que l'on précisera.

e) Montrer que la décomposition en somme de carrés trouvée à la question précédente n'est pas unique puisqu'on a également $q(X) = \frac{1}{12} \big(4\,(x + y + z)^2 - 3\,(x - y)^2 - (x + y - 2z)^2\big)$.

f) Que peut-on dire de la famille des signes des divers coefficients dans les différentes décompositions de la forme quadratique q en somme de trois carrés ?