le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 3 Théorie spectrale

- Rappels sur les déterminants

On se donne un entier $n \geq 1$ et une matrice carrée A d'ordre n. Le déterminant de A est un nombre noté $\det A$ ou $|A|$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) Si $n = 1$, $\det A = A$.

(ii) Invariance par transposition : $\det A^{\rm t} = \det A$.

(iii) Réduction de l'ordre. Si α est un nombre, B une matrice carrée d'ordre $(n-1)$ et

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{array} \right) \quad \text{ou} \quad A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad \text{alors} \ \det A = \alpha \, \det B.$$

(iv) Si on échange deux lignes [respectivement deux colonnes] de la matrice, on change le signe du déterminant.

(v) Si on multiplie tous les éléments d'une ligne [respectivement d'une colonne] par un même scalaire λ, on multiplie le déterminant par λ.

Donc si une matrice comporte une ligne [respectivement une colonne] de zéros, son déterminant est nul.

(vi) On peut retrancher à une ligne donnée [respectivement une colonne donnée] toute combinaison linéaire des autres lignes [respectivement des autres colonnes] sans changer la valeur du déterminant.

- Le cas de la dimension deux

On se donne une matrice d'ordre 2 notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors en suivant les règles précédentes et en séparant les divers cas de figure selon que $a = b = 0$ ou pas, on établit que de façon générale $\det A = a\,d - b\,c$.

- Déterminant d'une matrice diagonale

On a $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

- Déterminant d'une matrice triangulaire

On se donne une matrice triangulaire supérieure T ; ses éléments T_{ij} sont nuls si l'indice de ligne est strictement supérieur à l'indice de colonne : $T_{ij} = 0$ si $i > j$. On a donc

---

François Dubois, février 2022.

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant d'une telle matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux : $\det T = T_{11}\, T_{22}\, T_{nn} = \Pi_{j=1}^{n} T_{jj}$.

• Théorème fondemental

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

• Déterminant d'un produit de matrices

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, le déterminant du produit est égal au produit des déterminants : $\det\,(A\,B) = (\det A)\,(\det B)$.

En particulier, si la matrice P est inversible, on a $\det\,(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$.

• Invariance du déterminant par changement de base

On rappelle qu'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ d'un espace vectoriel E dans lui-même est aussi appelée endomorphisme de E. Le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ ne dépend pas de la base choisie.

En effet, supposons que $u \in \mathscr{L}(E)$ admet pour matrice M_u par rapport à une base donnée. Dans un changement de base associé à une matrice de passage P, la nouvelle matrice $\widetilde{M_u}$ de u par rapport à la nouvelle base satisfait à la relation $\widetilde{M_u} = P^{-1}\,A\,P$. Donc $\det \widetilde{M_u} = \det M_u$ compte tenu de ce qui vient d'être établi et le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

• Valeur propre et vecteur propre associé

On se donne une application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension n dans lui-même : $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que le vecteur **non nul** x de l'espace E est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ si et seulement si $u(x) = \lambda\, x$.

Un vecteur propre est défini à un scalaire non nul près : si x est un vecteur propre, alors tout vecteur de la forme $x' = \alpha x$ avec α scalaire non nul est vecteur propre, associé à la même valeur propre.

Un vecteur non nul du noyau $\ker u$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre $\lambda = 0$.

Par extension, on dit que le vecteur colonne X non nul de $\mathbb{R}^n$ est vecteur propre de la matrice A avec la valeur propre λ si on a : $A\,X = \lambda\,X$.

Dans la direction du vecteur propre x, l'application linéaire u se comporte comme une homothétie de rapport λ.

On se donne un espace verctoriel E de dimension 2 et une base (e_+, e_-) de E. On considère l'application linéaire u représentée par la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_+, e_-). Le premier vecteur de base e_+ est vecteur propre associé à la valeur propre $+1$ et le deuxième vecteur de base e_- est vecteur propre associé à la valeur propre -1.

- Calcul des valeurs propres

On se donne une application linéaire u d'un espace E de dimension n dans lui-même. Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de l'application linéaire u si et seulemnt si $\det(u - \lambda \,\mathrm{id}) = 0$. En effet, si λ est une valeur propre, il existe un vecteur propre $x \neq 0$, $x \in E$ de l'opérateur u: $u(x) = \lambda\, x$. Alors $(u - \lambda \,\mathrm{id})\, x = 0$ et l'application linéaire n'est pas inversible. Son déterminant est donc nul : $\det(u - \lambda \,\mathrm{id}) = 0$.
Réciproquement, si le nombre λ satisfait à la relation $\det(u - \lambda \,\mathrm{id}) = 0$, il existe $x \neq 0$ dans E de sorte que $u(x) = \lambda\, x$. En conséquence le nombre λ est valeur propre de l'application linéaire u.

- Polynôme caractéristique

On se donne une application linéaire u d'un espace E de dimension n dans lui-même. Le polynôme $p(\xi) = \det(u - \xi \,\mathrm{id})$ est un polynôme de degré n qui ne dépend que de l'application linéaire u. On l'appelle polynôme caractéristique de $u \in \mathscr{L}(E)$.
Le résultat du paragraphe précédent peut s'exprimer de la manière suivante : le nombre λ est valeur propre de l'application linéaire u si et seulemnt si il est racine du polynome caractéristique p: $p(\lambda) = 0$.

- Calcul du polynôme caractéristique

Pour calculer effectivement le polynôme caractéristique, on se donne une base de E et la matrice M_u de $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $p(\xi) = \det(M_u - \xi \,\mathrm{I_n})$.
Par exemple si $M_u = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ et les valeurs propres de l'opérateur de matrice M_u valent $+1$ et -1.

- Calcul d'un vecteur propre correspondant à une valeur propre donnée

Dans l'espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, on suppose que l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ admet la valeur propre λ : $\det(u - \lambda \,\mathrm{id}) = 0$. Pour déterminer le ou les vecteurs propres correspondants, on se donne une base de E, donc la matrice M_u de u dans cette base et on cherche les coordonnées du vecteur propre x qui sont écrites à l'aide de la matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$. On a alors $M_u X = \lambda\, X$.
On doit donc résoudre le système linéaire **homogène** $(M_u - \lambda \,\mathrm{I_n})\, X = 0$. On sait qu'*a priori*, ce système a au moins une solution non nulle X_0 $(M_u - \lambda \,\mathrm{I_n})\, X_0 = 0$.
Alors pour tout nombre $\alpha \neq 0$, le vecteur $X = \alpha\, X_0$ satisfait à la relation $(M_u - \lambda \,\mathrm{I_n})\, X = 0$.
Dans le cas où $M_u = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le lecteur est invité à calculer les vecteurs propres correspondant à chacune des valeurs propres explicitées plus haut.

- Diagonalisation

On se donne un entier $n \geq 1$, un espace vectoriel E de dimension n et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si l'espace E admet une base de vecteurs propres de u.
Il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n$, on ait $u(e_j) = \lambda_j\, e_j$. Alors si on se donne un vecteur $x \in E$

via ses coordonnées x_j, c'est à dire $x = \sum_{j=1}^n x_j\, e_j$, l'image $u(x)$ est donnée par l'expression $u(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\, e_j$.
Dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, l'aplication linéaire u est représentée par la matrice diagonale
$$M_u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- Opérateurs non diagonalisables

Attention ! Il existe des applications linéaires non diagonalisables ! Par exemple, si u est repésenté par la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $p_N(\lambda) = \lambda^2$, alors u ne peut pas être diagonalisable.

- Condition suffisante de diagonalisabilité

Si le polynôme caractéristique p de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ n'a que des racines simples, alors u est diagonalisable.
Attention ! Cette condition n'est pas nécessaire. Les opérateurs $u = id$ et $u = 0$ sont diagonalisables. Pourtant les polynomes caractéristiques correspondants valent respectivement $(1-\lambda)^n$ et $(-\lambda)^n$ et ont une valeur propre multiple dès que $n \geq 2$.

- Polynômes d'endomorphismes

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on peut donner un sens à $u^2 = u_{\rm o} u$, $u^3 = u_{\rm o} u_{\rm o} u$ et de façon générale à toute puissance $u^j = u_{\rm o} u_{\rm o} \dots {}_{\rm o} u$ de u pour tout entier j, avec la convention $u^0 = \mathrm{id}$. Par sommation, on peut, pour tout polynôme $p(\xi) = a_0 + a_1\, \xi + a_2\, \xi^2 \cdots + a_k\, \xi^k$ de degré k, définir l'endomorphisme $p(u) \in \mathscr{L}(E)$ avec la relation $p(u) = a_0\, \mathrm{id} + a_1\, u + a_2\, u^2 \cdots + a_k\, u^k$.
On remarque que comme les diverses puissances de u commutent entre elles, on a $p(u).\, q(u) = q(u).\, p(u)$ pour tout couple de polynômes p et q.
En considérant maintenant une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n$, le même raisonnement permet de définir un polynôme de matrice $p(A) = a_0\, \mathrm{I}_n + a_1 A + a_2 A^2 \cdots + a_k A^k \in \mathscr{M}_n$. Comme plus haut, pour tout couple de polynômes p et q, on a $p(A).\, q(A) = q(A).\, p(A)$.

- Théorème de Cayley-Hamilton

On se donne un espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme de E: $u \in \mathscr{L}(E)$.
On appelle p le polynome caractéristique de u: $p(\xi) = \det\,(u - \xi\, \mathrm{id})$. Alors on a $p(u) = 0$: l'endomorphisme annule son polynôme caractéristique.
On a aussi une réciproque. Si q est le "polynôme minimal", polynôme de plus bas degré qui annule $u \in \mathscr{L}(E)$, c'est à dire tel que $q \neq 0$ et $q(u) = 0$, alors le polynôme caractéristique p divise q élevé à une certaine puissance : $\exists k \in \mathbb{N}$, $\exists r$ polynôme, $p = r q^k$. En d'autres termes, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique ont exactement les même facteurs irréductibles, c'est à dire les mêmes racines si on travaille sur le corps des nombres complexes.

- Sur le corps des nombres complexes

Si p est un polynôme à coefficients réels, rien n'assure qu'un possède une racine réelle. Par exemple $p(\xi) = 1 + (\xi - 1)^2$ est toujours supérieur ou égal à 1 quel que soit le nombre réel ξ.

Donc ce polynôme n'a pas de racine réelle.
Sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le théorème de d'Alembert-Gauss (1799) assure que si n est un nombre entier ≥ 1, tout polynôme p de degré n a exactemet n racines compte tenu de l'ordre de multiplicité. Il existe des nombres complexes (éventuelement égaux) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de sorte que le polynôme p peut se factoriser sous la forme $p(\xi) = \alpha \Pi_{j=1}^{n} (\xi - \lambda_j)$. Les nombres complexes λ_j sont les racines du polynôme p.
On se place donc sur le corps des nombres complexes pour la fin de ce chapitre afin d'être certain qu'un endomorphisme u a au moins une valeur propre !

- Triangularisation

Soit n un entier ≥ 1 et E un espace vectoriel de dimension n sur le corps des nombres complexes. On appelle M_u la matrice de $u \in \mathscr{L}(E)$ dans une base de E sans propriété particulière. Il existe un changement de base associé à une matrice de passage P tel que la matrice $\widetilde{M_u} = P^{-1}\, M_u\, P$ de u dans la nouvelle base soit triangulaire ; on a $P^{-1}\, M_u\, P = T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & T_{nn} \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'avec cette forme triangulaire, les valeurs propres de u sont en évidence sur la diagonale de T. En effet, $\det(T - \lambda\, I_n) = \Pi_{j=1}^{n} (T_{jj} - \lambda)$ et la j^{o} valeur propre est égale à T_{jj}.

Exercices

- Déterminant de la matrice identité

On se donne un entier $n \geq 1$ et la matrice identité I_n d'ordre n: l'élément de matrice pour la ligne i et la colonne j est égal à δ_{ij}.
Montrer par récurrence sur l'entier n que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.

- Explicitation d'une matrice

On se donne un espace E de dimension 3, une base (e_1, e_2, e_3) de E et une application linéaire u de E dans E définie par les relations suivantes : $u(e_1) = 3\,e_1$, $u(e_2) = -2\,e_2$ et $u(e_3) = 4\,e_3$.
a) Quelle est la matrice de l'application u relativement à la base (e_1, e_2, e_3) ?
b) Comment, sans calcul, cette matrice est-elle modifiée si on se place maintenant dans la base (e_3, e_2, e_1) ?

- Théorème de Cayley-Hamilton

On se donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Quels sont les polynômes caractéristiques de ces deux matrices ?
b) Vérifier dans ces deux cas le théorème de Cayley-Hamilton : chacune des matrices A et N annule son polynôme caractéristique.

• Diagonalisation sur le corps des nombres complexes

On se donne deux nombres réels a et b et on pose $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si $b = 0$, cette matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $b \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer ses valeurs propres complexes.

d) Pour chaque valeur propre complexe, déterminer un vecteur propre, composé de nombres complexes.

e) On note P la matrice de passage des vecteurs propres trouvés à la question précédente. Déterminer sans calcul la valeur de la matrice $\widetilde{A} = P^{-1}\, A\, P$.

• Diagonalisation d'une matrice trois par trois

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les valeurs propres de cette matrice.

b) Proposer des valeurs simples pour les vecteurs propres de la matrice A.

c) Vérifier que les vecteurs propres trouvés à la question précédente le sont vraiment et retrouver ainsi la valeur numérique des trois valeurs propres.

d) Montrer que la matrice A est diagonalisable

e) Quelle est la matrice obtenue si on change de base pour se placer dans une base de vecteurs propres ?

• Diagonalisation d'une autre matrice trois par trois

Reprendre les questions de l'exercice précédent avec la matrice A remplacée par

$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 11 \\ -4 & 14 & -4 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.