le cnam

Algèbre linéaire et géométrie

Cours 1 Algèbre linéaire abstraite

• Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est la donnée d'un ensemble E, d'une addition notée $+$ sur E et d'une multiplication externe par un scalaire notée avec un point. Les éléments de E sont aussi appelés des vecteurs. On note $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, en rappelant la loi additive et la multiplication par les scalaires. L'addition fait de $(E, +)$ un groupe abélien, c'est à dire

(i) si on se donne deux vecteurs x et y de E, la somme $x+y$ est un nouveau vecteur qui appartient à E

(ii) associativité : $\forall x, y, z \in E,\ (x+y)+z = x+(y+z)$

(iii) le vecteur nul est élément neutre : $\forall x \in E,\ x+0 = 0+x = x$

(iv) vecteur opposé : $\forall x \in E, \exists x' \in E,\ x+x' = x'+x = 0$

(v) commutativité : $\forall x, y \in E,\ x+y = y+x$.

De plus,

(vi) pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $x \in E$, la multiplication externe de λ par x est notée $\lambda . x$. C'est un nouveau vecteur de l'espace E : $\lambda . x \in E$.

(vii) compatibilité avec l'addition des vecteurs : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E,\ \lambda .(x+y) = \lambda . x + \lambda . y$

(viii) compatibilité avec l'addition des scalaires : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ (\lambda+\mu). x = \lambda . x + \mu . x$

(ix) compatibilité avec la multiplication des scalaires : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ (\lambda\, \mu). x = \lambda .(\mu . x)$

(x) rôle de l'unité : $\forall x \in E,\ 1. x = x$.

Ces dix axiomes sont un peu austères mais permettent en pratique de faire des calculs algébriques avec la même souplesse qu'avec les nombres ordinaires.

• Un exemple fondamental

On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Si l'application f appartient à $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, le nombre réel $f(t)$ est défini sans ambiguité. On note parfois l'application f sous la forme $\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t) \in \mathbb{R}$ pour rappeler tout ce qui vient d'être dit.

La somme $f+g$ de deux fonctions $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une nouvelle fonction : $(f+g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Elle est définie en se donnant l'image de tout nombre réel t. L'égalité entre fonctions se traduit par une infinité d'égalités entre nombres réels. On définit la somme $f+g$ des deux fonctions par les relations suivantes : $\forall t \in \mathbb{R},\ (f+g)(t) = f(t)+g(t)$.

Le produit externe $\lambda . f$ du nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ par la fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une nouvelle fonction : $\lambda . f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\lambda . f)(t) = \lambda\, f(t)$.

C'est un exercice un peu long et fastidieux de vérifier qu'avec ces deux lois, $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ est effectivement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

François Dubois, février 2022.

- Sous-espace vectoriel

On se donne un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{R}$ et une partie F de E: $F \subset E$. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
(i) $0 \in F$
(ii) si x et y appartiennent à F, la somme $x+y$ appartient encore à F
(iii) si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in F$, le produit $\lambda.x$ appartient encore à F.
On retient que F contient le vecteur nul de l'espace E et que les opérations usuelles qui utilisent des vecteurs de F ne font par sortir du sous-espace.

- Proposition

Si F est un sous-espace de l'espace vectoriel $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- Exemples

Les ensembles $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
L'ensemble P_2 des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à deux est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en tout point est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette propriété exprime essentiellement que la somme de deux fonctions continues est encore une fonction continue.

- Propriété

Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace $(E, +, .)$, l'intersection $F_1 \cap F_2$ est encore un sous-espace vectoriel de E.
On peut remarquer qu'en général, la réunion $F_1 \cup F_2$ de deux sous espaces n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Sauf si l'un est inclus dans l'autre.

- Combinaison linéaire

On se donne une partie non vide A de l'espace vectoriel E: $A \subset E$. Une combinaison linéaire d'éléments de A est un vecteur x de l'espace E qui s'obtient de la façon suivante. On se donne un entier n supérieur ou égal à 1, des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_j \in \mathbb{R}$), des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ de A ($x_j \in A$) et on pose $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.x_j = \lambda_1.x_1 + \lambda_2.x_2 + \cdots + \lambda_n.x_n$.

- Exemple de combinaison linéaire

Dans l'espace $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on introduit les fonctions puissances $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$ et pour tout entier j, $p_j(t) = t^j$. Pour un entier $N \geq 1$, on pose $A = \{p_0, p_1, \dots, p_N\}$. Alors une combinaison f déléments de A est une fonction de la forme $f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j.p_j$: c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à N.
Attention. Par définition, une combinaison linéaire a toujours un nombre fini de termes !

- Théorème et définition

Sous-espace vectoriel engendré par une partie non vide d'un espace vectoriel

On se donne un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{R}$ et une partie non vide A de E. Alors l'ensemble $< A >$ de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est à dire
$< A >= \{x \in E, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A, x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.x_j\}$

est un sous-espace vectoriel de E. C'est par définition le sous-espace vectoriel engendré par le sous ensemble non vide $A \subset E$.

- Exemple

Avec des notations introduites plus haut, on pose $B = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots\} = \{p_j,\, j \in \mathbb{N}\}$, famille infinie de toutes les fonctions puissances. Une combinaison linéaire d'éléments de B est une fonction polynômiale. Son degré n'est pas connu *a priori*. L'espace $< B >$ engendré par les fonctions puissances est l'espace vectoriel des fonctions polynômiales.

- Famille génératrice

On dit que la partie non vide A de l'espace vectoriel E est génératrice si $< A >= E$: tout vecteur de E est combinaison linéaire d'éléments de A.

- Exemple

Dans l'espace vectoriel P_2 des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à deux, on pose $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ avec $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t^2 - 1$, $\varphi_3(t) = t$, $\varphi_4(t) = t + 1$ et $\varphi_5(t) = t^2 + t + 1$. Alors cette famille est génératrice : $< A >= P_2$.

- Famille libre

On se donne un nombre entier $n \geq 1$ et $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n vecteurs de E. On dit que la famille A est libre si et seulement si toute combinaison linéaire nulle d'éléments de A a tous ses coefficients nuls : $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j . x_j = 0\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0)$.
Si la famille A n'est pas libre, on dit qu'elle est liée et il existe des coefficients non tous nuls $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ de sorte que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j . x_j = 0$.

- Exemple

La famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ de fonctions puissances (avec $p_j(t) = t^j$ pour tout nombre réel t) est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
La famille $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ proposée plus haut est liée. On a la relation
$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_5 = 0$ qui constitue une combinaison linéaire nulle de ces cinq vecteurs avec des coefficients non tous nuls.

- Application linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On se donne aussi une application u de E dans F : pour tout $x \in E$, le vecteur $u(x)$ est défini de façon unique et appartient à l'espace F. On dit que u est linéaire et on note $u \in \mathscr{L}(E, F)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
(i) pour tout $x, y \in E$, $u(x + y) = u(x) + u(y)$
(ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in E$, $u(\lambda . x) = \lambda . u(x)$.
Si $F = E$, on dit que u est un homomorphisme de l'espace vectoriel E et on note $u \in \mathscr{L}(E)$.
Si l'application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ est de plus est bijective, on dit que u est un isomomorphisme des espaces E et F ; on note $u \in \mathrm{Isom}(E, F)$.

- Un exemple fondamental d'applications linéaires : les homothéties

On se donne un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{R}$ et un nombre réel α. L'homothéthie h_α de rapport α est l'application linéaire de E dans E telle que pour tout $x \in E$, $h_\alpha(x) = \alpha . x$. Une homothétie de rapport α multiple tout vecteur par le nombre fixé α.

Si $\alpha = 0$, alors h_0 est l'application nulle : $E \ni x \longmapsto h_0(x) = 0 \in E$.
Si $\alpha = 1$, l'application h_1 est l'application identité de l'espace E: id: $h_1(x) = x$.
Les homothéthies sont des applications linéaires particulièrement simples et nous aborderons dans la suite du cours la thérie spectrale qui essaie le plus possible de se ramener au cas des homothéties.

- Noyau d'une applications linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{R}$ et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de E dans F. Le noyau de l'application u, noté $\mathrm{Ker}\, u$ est par définition égal à l'ensemble des vecteurs $x \in E$ telle que leur image par u est égale à zéro dans F: $\mathrm{Ker}\, u = \{x \in E,\, u(x) = 0\}$.
Le noyau de l'application linéaire u n'est jamais vide puisque $u(0) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Ker}\, u$.
En effet, $u(0+0) = u(0) + u(0)$ donc $u(0) = u(0) + u(0)$ et $u(0) = 0$.

- Le noyau $\mathrm{Ker}\, u$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ

On a déjà établi que $0 \in \mathrm{Ker}\, u$. Il suffit ensuite de vérifier les deux autres conditions des sous-espaces vectoriels, ce qui constitue un bon exercice !

- L'application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à zéro.

Rappelons que l'application $u : E \longrightarrow F$ est par définition injective si et seulement si on a la condition $\forall x, y \in E,\, \big((u(x) = u(y)) \Longrightarrow (x = y)\big)$. Compte tenu de la linéarité, on établit [exercice !] que cette condition est équivalente à $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$.

- Image d'une applications linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{R}$ et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ de E dans F. L'image de l'application u, notée $\mathrm{Im}\, u$ est par définition égale à l'ensemble des vecteurs $y \in F$ qui sont images par u d'au moins un vecteur $x \in E$:
$\mathrm{Im}\, u = \{y \in F, \exists x \in E, u(x) = y\} = \{u(x), x \in E\}$. L'image de l'application linéaire u n'est jamais vide puisque $u(0) = 0$ donc $0 \in \mathrm{Im}\, u$.

- L'image $\mathrm{Im}\, u$ est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée

On a déjà établi que $0 \in \mathrm{Im}\, u$ et il est claire que $\mathrm{Im}\, u \subset F$. Il suffit ensuite de vérifier que l'image reste stable par addition des vecteurs et multiplication par un scalaire. C'est une conséquence directe de la linéarité.

- L'application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est surjective si et seulement si son image $\mathrm{Im}\, u$ est identique à l'espace d'arrivée

Rappelons que l'application $u : E \longrightarrow F$ est par définition surjective si et seulement si tout vecteur $y \in F$ est atteint par l'application u, c'est à dire qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u(x) = y$. C'est exactement ce qu'exprime la condition $\mathrm{Im}\, u = F$.

- Sous-espaces vectoriels supplémentaires

On se donne deux sous-espaces F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E. On dit que F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires et on écrit $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
(i) on peut décomposer tout vecteur $x \in E$ comme la somme d'un vecteur $x_1 \in F_1$ et d'un vecteur $x_2 \in F_2$: $x = x_1 + x_2$.
(ii) l'intersection $F_1 \cap F_2$ est réduite au vecteur nul : $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique vecteur $x_1 \in F_1$ et un unique vecteur $x_2 \in F_2$ de sorte que $x = x_1 + x_2$: $\forall x \in E, \exists! x_1 \in F_1, \exists! x_2 \in F_2, x = x_1 + x_2$.

- Exemple de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Dans l'espace vectoriel $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, .)$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace F_+ des fonctions paires et le sous-espace F_- des fonctions impaires sont supplémentaires :
$\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F_+ \oplus F_-$. Pour une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ arbitraire, il suffit d'introduire f_+ et f_- définies respectivement par les relations $f_+(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) + f(-t)\big)$ et $f_-(t) = \frac{1}{2}\big(f(t) - f(-t)\big)$.

- Dimension finie

Un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est dit de dimension finie s'il peut être engendré par un nombre fini de vecteurs. En d'autres termes, il existe une partie non vide A de E telle que le sous espace vectoriel $< A >$ engendré par A est exactement égal à E :
$\exists A \subset E,\ A \neq \emptyset,\ A$ finie telle que $< A >= E$.
Si la propriété précédente est en défaut, on dit que l'espace E est de dimension infinie.
Par exemple pour $E = \mathbb{R}^3$, la famille $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ composée de quatre vecteurs est génératrice.
Pour $N \in \mathbb{N}$ entier naturel et $E = P_N$ espace des polynômes de degré inférieur ou égal à N, on pose $p_j(t) = t^j$. Alors la famille $A = \{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$ des fonctions puissances est une famille génératrice et $< A >= P_N$.

- Base d'un espace vectoriel de dimension finie

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et une famille non vide
$A = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ de E. La famille A est une base de E si et seulement si elle est à la fois libre et génératrice.
Alors tout vecteur $x \in E$ admet une décomposition unique $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ dans la base
$(e_0, e_1, \ldots, e_n)$; les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont appelés les coordonnées du vecteur $x \in E$ relativement à la base $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

- Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème. Deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
Si $A = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (f_0, f_1, \ldots, f_m)$ sont deux bases du même espace vectoriel E de dimension finie, alors les entiers n et m sont égaux.
On appelle dimension et on note $\dim E$ le nombre de vecteurs commun à toutes les bases de l'espace vectoriel E.
Par exemple, l'espace P_N des polynômes de degré inférieur ou égal à N admet une base qui comporte $N+1$ fonctions ; il est de dimension $N+1$.

Exercices

- Familles de fonctions trigonométriques

On pose $p_0(t) = 1$, $c(t) = \cos t$, $s(t) = \sin t$ et $d(t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

a) Démontrer que la famille $\{p_0, c, s\}$ est libre.

b) Démontrer que la famille $\{p_0, c, d\}$ est liée.

• Une application linéaire en dimension finie

On définit l'application u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par la relation $u(x, y, z) = (x+y\,, x+z)$.

a) Montrer que l'application u est linéaire.

b) Déterminer le noyau ker u de l'application u.

c) Déterminer l'image Im u de l'application u.

• Une autre application linéaire en dimension finie

Reprendre l'exercice précédent avec l'application v de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $v(x, y) = (x-y\,, x+y\,, x-2y)$.

• Une famille libre de fonctions

Pour j entier supérieur ou égal à zéro, on définit la fonction puissance p_j par : $p_j(t) = t^j$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour N entier supérieur ou égal à zéro, on pose $A_N = \{p_0, p_1, \ldots, p_N\}$.

a) Montrer que la famille A_2 est libre dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer par récurrence sur l'entier N que la famille A_N est une famille libre dans ce même espace vectoriel.

• Opérateur de dérivation dans un espace de polynômes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un scalaire, P_n est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On définit l'opérateur D dans l'espace P_2 par la relation $(Dp)(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, fonction dérivée de la fonction p.

b) Démontrer que pour tout $p \in P_2$, $Dp \in P_2$.

c) Démontrer que l'application D est une application linéaire de P_2 dans P_2 : $D \in \mathscr{L}(P_2)$.

d) Déterminer l'espace $\mathrm{Ker}\, D$.

e) Déterminer l'espace $\mathrm{Im}\, D$.

On se place maintenant dans le contexte suivant. On se donne un entier $N \geq 1$. On définit l'opérateur D dans l'espace P_N par la même relation que plus haut : $(Dp)(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, fonction dérivée de la fonction p.

f) Démontrer que pour tout $p \in P_N$, $Dp \in P_N$.

g) Démontrer que l'application D est une application linéaire de P_N dans P_N : $D \in \mathscr{L}(P_N)$.

h) Déterminer l'espace $\mathrm{Ker}\, D$.

i) Déterminer l'espace $\mathrm{Im}\, D$.