le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Algèbre linéaire et géométrie (MVA107)

Devoir 1, à rendre pour la séance numéro 4, le 16 octobre 2019

Etude d'une famille d'opérateurs

On considère un espace vectoriel E sur le corps des nombres réels. On ne précise pas s'il est de dimension finie ou infinie dans un premier temps. On note 0 le zéro de l'espace E. On note id l'application identité de E dans E: $\mathrm{id}(x) = x$ pour tout vecteur $x \in E$. On se donne une application linéaire s de E dans E: $s \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que s satisfait à la relation $s_{\mathrm{o}} s = \mathrm{id}$, c'est à dire $s\big(s(x)\big) = x$ pour tout vecteur $x \in E$. On se propose d'étudier la structure induite sur l'espace E par un tel opérateur.

a) Montrer que si $x \in E$, on a $s\big(x + s(x)\big) = x + s(x)$.

b) Montrer que si $x \in E$, on a $s\big(x - s(x)\big) = -\big(x - s(x)\big)$.

On note E_+ l'ensemble des $x \in E$ tels que $s(x) = x$ et E_- l'ensemble des $x \in E$ tels que $s(x) = -x$

c) Montrer que tout vecteur $x \in E$ peut se décomposer sous la forme $x = y + z$ avec $y \in E_+$ et $z \in E_-$. En d'autres termes, on a $E = E_+ + E_-$.

d) Montrer que les vecteurs $y \in E_+$ et $z \in E_-$ de la décomposition précédente sont uniques.

e) En déduire que $E_+ \cap E_- = \{0\}$.

f) Montrer que E est la somme directe de E_+ et E_-: $E = E_+ \oplus E_-$.

g) Si $x = y + z$ avec $y \in E_+$ et $z \in E_-$, que vaut le vecteur $s(x)$?

h) En déduire que l'opérateur s est une symétrie par rapport à l'espace E_+ parallèlement à l'espace E_-.

On suppose maintenant que l'espace E est de dimension finie. On se donne une base de E_+ et une base de E_-. On admet qu'en réunissant ces deux bases, on obtient une base de E.

i) Quelle est la matrice S de l'opérateur s dans la base ainsi obtenue ? On pourra la décomposer en quatre blocs.

François Dubois, 02 octobre 2019.