le cnam

MVA006 - Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Examen première session, 25 juin 2019

Enseignant responsable :

François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours,

sous forme papier

et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours d'Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire" (MVA006)

Examen du 25 juin 2019 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Droites dans l'espace

On se donne un espace affine $\mathcal{E}_3$ de dimension trois et on appelle E_3 l'espace vectoriel qui le dirige. On se donne un repère affine de $\mathcal{E}_3$ composé d'une part de l'origine $O \in \mathcal{E}_3$ et d'autre part de la base $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ de l'espace E_3. On se donne un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, deux points A et B de $\mathcal{E}_3$ de coordonnées respectives : $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et deux vecteurs u et v de coordonnées $u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2 - \alpha \\ -1 \end{pmatrix}$. On note D la droite contenant le point A et dirigée par le vecteur u et Δ la droite contenant le point B et dirigée par le vecteur v.

a) Verifier que quel que soit la valeur du paramètre α, les droites D et Δ ne sont pas parallèles.

b) Pour quelle valeur du paramètre α les droites D et Δ sont-elles coplanaires ?

c) Dans ce cas, calculer leur point d'intersection I.

d) Toujours avec la même hypothèse, établir l'équation du plan P qui contient les deux droites D et Δ.

Exercice 2) Courbe en coordonnées polaires

On se donne $a > 0$ et on se propose d'étudier et construire la courbe Γ du plan décrite par la représentation polaire $r = a \sin^2 \theta$, avec des coordonnées cartésiennes x et y qui satisfont aux relations $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

a) Montrer que la courbe Γ admet aussi la représentation paramétrique $(x,\, y) = (X(\theta),\, Y(\theta))$ avec $X(\theta) = a \sin^2 \theta \, \cos \theta$ et $Y(\theta) = a \sin^3 \theta$.

b) Si on change θ en $\theta + \pi$, montrer que la courbe Γ satisfait à une propriété géométrique simple que l'on précisera.

c) Si on change θ en $-\theta$, montrer que la courbe Γ satisfait à une propriété géométrique simple que l'on précisera.

d) En déduire qu'il suffit d'étudier la courbe lorsque θ appartient à l'intervalle $[0,\, \frac{\pi}{2}]$.

e) Quelle est la limite du rapport $\frac{Y(\theta)}{X(\theta)}$ si θ tend vers zéro ?

f) En déduire l'équation de la tangente à la courbe à l'origine (pour $\theta = 0$).

g) Quelle est la tangente à la courbe Γ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$?

h) Dessiner la courbe Γ pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

i) Dessiner la courbe Γ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3) Points extrémaux

Pour $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,\, y) = -\frac{1}{2}\,(x^2 + y^2) + \frac{1}{4}\,(x^2 + 3\,y^2)^2$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ de la fonction f en un point quelconque du plan.

b) Calculer la matrice hessienne $H(x,\, y)$ des dérivées partielles secondes de la fonction f.

c) Pour quelles valeurs de $(x,\, y)$ dispose-t-on d'un point critique, c'est à dire d'un point où les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y)$ sont nulles toutes deux ?

d) Pour chacun des cinq points critiques trouvés à la question c), préciser s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point col.

Exercice 4) Intégrale double

On se donne $R > 0$ et on note D le quart de disque de centre l'origine, de rayon R :
$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq R^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$. On pose aussi $f(x,\, y) = x\, y$.

a) Dessiner le domaine D.

b) Montrer qu'en coordonnées polaires ($x = r\, \cos\theta,\ y = r\, \sin\theta$), le domaine D est décrit par des inégalités simples que l'on précisera.

c) Calculer l'intégrale double $I = \iint_D f(x,\, y)\; \mathrm{d}x\; \mathrm{d}y$.