

**Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire**

(MVA006)

Devoir 2

à rendre pour la séance numéro 7, le 21 mars 2023

Exercice - Espace des polynômes de degré inférieur ou égal à deux

On appelle P_2 l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à deux :

$$P_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = a + bt + ct^2\}.$$

- 1) Montrer que muni de l'addition des fonctions $((f + g)(t) = f(t) + g(t))$ et de leur multiplication par un scalaire $((\lambda \cdot f)(t) = \lambda f(t))$, l'ensemble P_2 est un espace vectoriel.
- 2) Pour tout nombre réel t , on pose $e_0(t) = 1$, $e_1(t) = t$ et $e_2(t) = t^2$. Montrer que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de P_2 . Dans la suite, cette base est nommée "base canonique".
- 3) Montrer que l'opérateur de dérivation D défini pour $f \in P_2$ par $(Df)(t) = f'(t)$ (la dérivation usuelle !) définit une application linéaire de P_2 dans lui-même.
- 4) Quelle est l'expression des fonctions De_0 , De_1 et De_2 dans la base canonique ?
- 5) En déduire la matrice de la dérivation D dans la base canonique de P_2 .
- 6) Que vaut $\ker D$?
- 7) Que vaut $\text{Im } D$?

François Dubois, 07 mars 2023.