le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 11 — Dérivée seconde et conditions d'extremum

- Dérivation des fonctions composées : un premier cas.

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie sur D et deux fonctions $\mathbb{R} \ni t \longmapsto X(t)$ et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto Y(t)$ de telle sorte que pour tout t, $(X(t), Y(t)) \in D$. Alors la fonction composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ est bien définie pour tout t.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction composée g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors la fonction g elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.

- Exemple de dérivation de fonctions composées

La relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(X(t), Y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$ se découvre par le calcul algébrique si on choisit par exemple une fonction f polynômiale de degré deux :
$f(x, y) = p\,x + q\,y + r + \frac{1}{2}\gamma\,x^2 + \delta\,x\,y + \frac{1}{2}\varepsilon\,y^2$. On sait que de façon générale,
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = p + \gamma\,a + \delta\,b$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = q + \delta\,a + \varepsilon\,b$. Donc en particulier,
$\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t), Y(t)\big) = p + \gamma\,X(t) + \delta\,Y(t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t), Y(t)\big) = q + \delta\,X(t) + \varepsilon\,Y(t)$.
La fonction composée $g(t)$ a donc pour expression :
$g(t) = p\,X(t) + q\,Y(t) + r + \frac{1}{2}\gamma\,X(t)^2 + \delta\,X(t)\,Y(t) + \frac{1}{2}\varepsilon\,Y(t)^2$. On la dérive avec les règles usuelles qui permettent de prendre en compte les fonctions composées à une variable :
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = p\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + q\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \gamma\,X(t)\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \delta\,\big(X(t)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\,Y(t)\big) + \varepsilon\,Y(t)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On factorise $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$:
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \Big(p + \gamma\,X(t) + \delta\,Y(t)\Big)\,\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \Big(q + \delta\,X(t) + \varepsilon\,Y(t)\Big)\,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$. On peut donc, compte tenu du calcul fait plus haut, réecrire cette expression sous la forme $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t))\, \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$.
Et l'expression que nous venons d'obtenir est en fait très générale.

- Dérivation des fonctions composées : un second cas

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et deux autres fonctions de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto X(u, v) \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2 \supset \Delta \ni (u, v) \longmapsto Y(u, v) \in \mathbb{R}$ de sorte que pour tout $(u, v) \in \Delta$, $(X(u, v), Y(u, v)) \in D$. Alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est bien définie sur Δ.
Si f est continue sur D et si les fonctions X et Y sont continues sur Δ, alors la fonction composée g est une fonction de deux variables continue sur Δ.
De plus, si f est différentiable sur D et si les fonctions X et Y sont différentiables sur Δ, alors la fonction composée $g(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v))$ est différentible sur Δ et les dérivées partielles se calculent comme suit : $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial v}$.

François Dubois, mai 2023.

Exemple des coordonnées polaires $g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. On peut calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f. C'est un exercice laissé au lecteur.

- Matrice jacobienne

On regroupe les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ au sein d'une matrice $J_f(x, y)$, la matrice jacobienne de f au point (x, y) : $J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. C'est une matrice à une ligne et deux colonnes pour cette fonction scalaire f de deux variables. On fait de même pour la fonction composée g : $J_g(u, v) = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \;\; \frac{\partial g}{\partial v}\right)$ et pour la fonction de deux variables "XY" qui regroupe les deux fonctions $X(u, v)$ et $Y(u, v)$: la matrice J_{XY} est dans ce cas une matrice à deux lignes et deux colonnes : $J_{XY}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}$. Les relations $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial Y}{\partial v}$ s'expriment sous la forme suivante : $J_g(u, v) = J_f(x, y) \cdot J_{XY}(u, v)$. La matrice jacobienne de la composée est égale au produit des matrices jacobiennes de chacune des deux fonctions.

- Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions d'une seule variable

Nous avons vu lors du chapitre sur les courbes paramétrées que si l'on dispose d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie "au voisinage" du réel $a \in \mathbb{R}$ (c'est à dire dans un intervalle de la forme $]a-\eta, a+\eta[$ avec $\eta > 0$) et dérivable au point $a \in \mathbb{R}$, on a : $f(a+h) = f(a) + f'(a)\, h + |h|\, \varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro. C'est le développement de Taylor de la fonction f au point a.

- Formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions de deux variables

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition D et tel qu'un carré $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ centré en (a, b) est complètement inclus dans D : $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[\subset D$. On suppose f différentiable au point (a, b). Alors on a le développement suivant, encore appelé "formule de Taylor au premier ordre" :
$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$,
où $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers le point $(0, 0)$ si (h, k) tend vers $(0, 0)$.

- Dérivées partielles secondes et matrice hessienne

On suppose la fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable en tout point $(x, y) \in D$. Alors les deux fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont aussi des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. On se donne enfin un point $(a, b) \in D$ où les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables. On dispose alors de quatre dérivées partielles secondes : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$. On les regroupe dans la matrice hessienne :
$H(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b) \end{pmatrix}$. Pour les fonctions de deux variables, la dérivée seconde n'est plus un nombre, mais une matrice !

- Théorème de Schwarz : égalité des dérivées partielles croisées

On suppose la fonction $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ différentiable sur D. Alors les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies de D dans $\mathbb{R}$. Si elles sont différentiables au point (a, b), on dit que la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b).

Si la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b), les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$ sont égales : $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial f}{\partial y}\big)(a, b) = \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\big)(a, b)$. On note indifféremment $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$. En d'autres termes, si la fonction f est deux fois différentiable au point (a, b), la matrice hessienne $H(a, b)$ en ce point est une matrice symétrique.

Attention aux hypothèses du résultat précédent : la fonction s définie par $s(0, 0) = 0$ et $s(x, y) = x\, y \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ admet les dérivées partielles secondes croisées différentes à l'origine : $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}\big)(0, 0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}\big)(0, 0)$ [exercice !].

- Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction d'une variable réelle

On se donne une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage du réel $a \in \mathbb{R}$ deux fois dérivable dérivable au point $a \in \mathbb{R}$. On a la formule de Taylor à l'ordre deux :
$f(a+h) = f(a) + f'(a)\, h + \frac{1}{2} f''(a)\, h^2 + |h|^2\, \varepsilon(h)$ et la fonction $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro.

- Formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction de deux variables réelles

On se donne une fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ et un point (a, b) qui appartient à l'ensemble de définition D et comme plus haut, tel qu'un carré $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ centré en (a, b) est inclus dans D.

On suppose f différentiable dans ce pavé $]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[$ et les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ différentiables au point (a, b). Alors on a la formule de Taylor à l'ordre deux suivante :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\, k \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2\Big] + \|\, (h, k)\, \|^2\ \varepsilon(h, k), \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h, k)$ est une fonction qui tend vers le point $(0, 0)$ si (h, k) tend vers $(0, 0)$.

On remarque qu'on peut écrire le terme du second ordre dans la relation précédente sous forme d'un produit de trois matrices, dont la matrice hessienne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 = (h\ \ k)\ H(a, b)\, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

- Conditions nécessaires de minimum d'une fonction d'une variable réelle

On se donne $a \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f\ :]a-\eta, a+\eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a deux fois dériable en a. On suppose que f admet un minimum (local) au point a :
$f(x) \geq f(a)$, $\forall x \in]a-\eta, a+\eta[$. Alors on a $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.

- Un minimum définit un point critique

On suppose que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dispose de dérivées partielles continues au voisinage du point $(a, b) \in D$. Si la fonction f admet un minimum (local) au point (a, b), c'est à dire si $f(x, y) \leq f(a, b)$ pour tout point $(x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$ pour $\eta > 0$ assez petit, alors le point (a, b) est un "point critique" de la fonction f: $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Dans le cas d'un maximum, $f(x, y) \geq f(a, b)$, $\forall (x, y) \in D$ tel que $a-\eta < x < a+\eta$ et $b-\eta < y < b+\eta$. On a alors également $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

• Conditions nécessaires de minimum à l'ordre deux d'une fonction de deux variables réelles
Dans les mêmes conditions que ci-dessus, si de plus f admet des dérivées partielles secondes au point (a, b), alors on a pour un minimum
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 \geq 0$ pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Cette famille d'inégalités est équivalente aux deux relations suivantes :
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \geq 0$ et $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 \geq 0$.

• Conditions nécessaires de maximum à l'ordre deux pour deux variables réelles
Dans le cas d'un maximum au point (a, b), c'est à dire $f(x, y) \geq f(a, b)$ pour tous les points (x, y) au voisinage de (a, b), on a nécessairement
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\, h^2 + 2\, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\, h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\, k^2 \leq 0$ pour tout couple $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Cette famille d'inégalités est équivalente aux deux inégalités : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \leq 0$ et
$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 \geq 0$. On remarque qu'une seule des deux inégalités a changé entre le cas du minimum et celui du maximum.

• Condition suffisante de minimum pour une fonction d'une variable réelle
On se donne $a \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ et $f :]a - \eta, a + \eta[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de a deux fois dériable en a. On suppose que la dérivée première est nulle en a : $f'(a) = 0$. On suppose également que la dérivée seconde strictement positive au point a : $f''(a) > 0$. Alors la fonction f admet un minimum (local) au point a : il existe $\theta > 0$ assez petit de sorte que pour tout h tel que $|h| < \theta$, on a $f(a + h) \geq f(a)$.
On note l'importance de l'inégalité stricte pour la dérivée seconde au point a. Si la dérivée seconde est nulle, on ne peut *a priori* rien dire, comme pour la fonction $f(x) = x^3$ au point $a = 0$.

• Condition suffisante de minimum pour une fonction de deux variables réelles
On suppose que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dispose de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ différentiables au voisinage du point $(a, b) \in D$. On suppose d'une part que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ et d'autre part que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ et $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 > 0$ (avec des inégalités strictes !). Alors la fonction f admet un minimum local au point (a, b) : il existe $\theta > 0$ de sorte que si le point (x, y) satisfait aux inégalités $a - \theta < x < a + \theta$ et $b - \theta < y < b + \theta$, alors $f(x, y) \geq f(a, b)$. On remarque sous les hypothèses précédentes, on a alors forcément $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$.
Par exemple, la fonction $p(x, y) = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2)$ satisfait les hypothèses précédentes au point $(0, 0)$ et on a $p(x, y) \geq p(0, 0)$ pour tout (x, y).

• Condition suffisante de maximum pour une fonction de deux variables réelles
Toutes choses égales par ailleurs, si on suppose $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ et
$\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 > 0$ (toujours avec des inégalités strictes), alors la fonction f admet un maximum local au point (a, b) et $f(x, y) \leq f(a, b)$ dès que le point (x, y) est assez proche du point (a, b).
On remarque que dans ce cas, on a alors nécessairement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

- Point col, ou point selle

On suppose que le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour la fonction f : $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. On suppose qu'on a l'inégalité $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big)\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\big) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\big)^2 < 0$. Alors le point (a, b) n'est ni un maximum, ni un minimum, mais un "point col" : la fonction f n'est ni supérieure, ni inférieure au nombre $f(a, b)$ au voisinage de (a, b).
C'est le cas par exemple des fonctions $g(x, y) = x^2 - y^2$ et $h(x, y) = x\,y$ au point $(0, 0)$.
En résumé, si on a un point critique tel que le déterminant de la matrice hessienne est strictement négatif, alors on a un point col. Si ce déterminant est strictement positif, on a un point de minimum pour $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big) > 0$ et un point de maximum pour $\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\big) < 0$. Dans les autres cas, il faut aller plus loin dans le développement de Taylor que l'ordre deux qui a été exposé lors de cette leçon.

Exercices

- Extrema d'une fonction polynomiale [d'après Nathalie Zanon]

On pose $f(x, y) = 4x^3 + 4x\,y^2 + x^2 + y^2 - 4x$.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'ordre un, puis les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ d'ordre deux de cette fonction.
b) Quels sont les points critiques de la fonction f, c'est à dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on a simultanément $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$?
c) Pour chacun de ces points, déterminer s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un point col. [$\big(\frac{1}{2}, 0\big)$ minimum, $\big(-\frac{2}{3}, 0\big)$ maximum, [$\big(-\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\big)$ points cols]

- Extrema d'une fonction polynomiale [d'après Nathalie Zanon]

On pose $f(x, y) = x^2\,y + 6\,y^2 - 4x\,y + x^2 - 4x$.
a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'ordre un, puis les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ d'ordre deux de cette fonction.
b) Quels sont les points critiques de la fonction f, c'est à dire les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels on a simultanément $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$?
c) Pour chacun de ces points, déterminer s'il s'agit d'un maximum, d'un minimum ou d'un point col. [$\big(2, \frac{1}{3}\big)$ minimum, $(6, -1)$ point col, $(-2, -1)$ point col]

- Un cas de non égalité des dérivées partielles croisées

On pose $s(x, y) = x\,y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $s(0, 0) = 0$.
a) En passant en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$), montrer que la fonction s est continue en zéro : sa limite, pour (x, y) tendant vers le point $(0, 0)$, est nulle.
b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial s}{\partial y}(x, y)$ lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$.
c) En revenant à la définition d'une dérivée partielle, montrer que $\frac{\partial s}{\partial x}(0, 0) = 0$. De la même façon, montrer que $\frac{\partial s}{\partial y}(0, 0) = 0$.
d) Calculer la limite de l'expression $\frac{1}{y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial s}{\partial x}(0, 0)\big)$ lorsque y tend vers zéro.
e) En déduire la valeur de la dérivée partielle seconde $\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial s}{\partial x}\big)(0, 0)$.

f) Calculer la limite de l'expression $\frac{1}{x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial s}{\partial y}(0,0)\big)$ lorsque x tend vers zéro.

g) En déduire la valeur de la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial s}{\partial y}\big)(0,0)$.

h) Les fonctions $\frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y}$ sont-elles différentiables au point $(0,0)$?

• Méthode de d'Alembert pour l'équation des ondes

On cherche à déterminer l'expression générale d'une fonction $f(x,y)$ régulière solution de l'équation des ondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pose $u = x+y$, $v = x-y$ et on introduit la fonction $g(u,v)$ définie par $g(u,v) = f(x,y)$.

a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.

b) Exprimer la combinaison $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction g.

c) Résoudre par intégrations successives l'équation obtenue.

d) En déduire qu'une solution générale $f(x,y)$ de l'équation des ondes peut se décomposer sous la forme $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, où les fonctions d'une seule variable φ et ψ sont arbitraires.

e) Vérifier que si la fonction f est de la forme $f(x,y) = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, elle est bien solution de l'équation des ondes.