le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 5 Déterminants

• Le cas de la dimension deux

On se donne une matrice d'ordre 2 notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Nous avons vu (leçon 2) que la matrice A est inversible, ce qui signifie que le système linéaire $AX = B$ a une solution unique $X \in \mathbb{R}^2$ quel que soit le second membre $B \in \mathbb{R}^2$, si et seulement si le déterminant de A défini par $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv ad - bc$ est différent de zéro.

• Règles de calcul d'un déterminant

Le déterminant d'une matrice carrée A d'ordre n est un nombre noté $\det A$ qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) Si $n = 1$, $\det A = A$.

(ii) Invariance par transposition : $\det A^{\mathrm{t}} = \det A$.

(iii) Réduction de l'ordre. Si α est un nombre, B une matrice carrée d'ordre $(n-1)$ et

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right), \text{ alors } \det A = \alpha \det B.$$

(iv) Si on échange deux lignes [respectivement deux colonnes] de la matrice, on change le signe du déterminant.

(v) Si on multiplie tous les éléments d'une ligne [respectivement d'une colonne] par un même scalaire λ, on multiplie le déterminant par λ.

(vi) On peut ajouter ou retrancher à une ligne [respectivement une colonne] donnée toute combinaison linéaire des autres lignes [respectivement des autres colonnes] sans changer la valeur du déterminant.

• Cohérence des règles générales avec le cas $n = 2$.

Avec les règles ci-dessus, on établit [exercice !] que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Si on échange deux lignes d'un déterminant d'ordre deux, on change bien son signe :

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ab = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

On a la même propriété avec les colonnes [exercice !].

François Dubois, mars 2023.

Si on multiplie une colonne d'un déterminant d'ordre 2 par le nombre λ, le déterminant est multipié par λ : $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \lambda\, a d - (\lambda\, c)\, d = \lambda\, (a d - b c) = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Il en est de même avec les lignes [exercice !].

On remplace la première ligne d'un déterminant deux par deux $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ par cette même ligne plus une constante fois la troisième ligne ; la valeur du déterminant n'est pas modifiée :
$\begin{vmatrix} a+\lambda\, c & b+\lambda\, d \\ c & d \end{vmatrix} = (a+\lambda\, c)\, d - c\, (b+\lambda\, d) = a d - b c = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

- Règle de Sarrus pour le calcul d'un déterminant d'ordre trois

A l'aide des règles de calcul d'un déterminant proposées ci-dessus, on établit, après un calcul qui ne demande que du soin, une relation générale pour le calcul d'un déterminant d'ordre 3 :
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a e i + d h c + g b f - d b i - a h f - g e c$.

- Théorème fondemental

Soit A une matrice carrée d'ordre n. La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Déterminant d'un produit de matrices

Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, le déterminant du produit est égal au produit des déterminants : $\det\, (A\, B) = (\det A)\, (\det B)$.
On en déduit que quelle que soit la dimension, le déterminant de la matrice identité I est égal à un : $\det \mathrm{I} = 1$.
De plus, si la matrice P est inversible, on a $\det\, (P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$.

- Invariance du déterminant par changement de base

Le déterminant d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E dans lui-même ne dépend pas de la base choisie. En effet, supposons que u admet pour matrice A par rapport à une base donnée. Dans un changement de base associé à une matrice de passage P, la nouvelle matrice $\widetilde{A}$ de u par rapport à la nouvelle base satisfait à la relation $\widetilde{A} = P^{-1}\, A\, P$. Donc $\det \widetilde{A} = \det A$ compte tenu de ce qui vient d'être établi.

- Complément sur les bases

On considère un espace vectoriel E de dimension n. On se donne une famille libre $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de E dont le nombre de vecteurs est exactement égal à la dimension de E. Alors $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E.

- Deux vecteurs colinéaires en dimension trois.

On considère deux vecteurs u et v d'un espace vectoriel E_3 de dimension trois. On développe ces deux vecteurs dans une base (e_1, e_2, e_3) de E_3 : $u = \sum_{j=1}^{3} u_j\, e_j$ et $v = \sum_{j=1}^{3} v_j\, e_j$. La famille (u, v) est liée si et seulement si les trois déterminants suivants sont nuls :
$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} = 0.$

La preuve se décompose en deux étapes. On suppose d'abord que la famille (u, v) est liée. Si $u = 0$, alors $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ et les trois déterminants $\Delta_3 = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}$ et $\Delta_2 = \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}$ sont nuls.

Si $u \neq 0$, il existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ de sorte que $\alpha\, u + \beta\, v = 0$. On ne peut avoir $\beta = 0$ car alors $\alpha\, u = 0$ et $\alpha = 0$ car $u \neq 0$. Mais alors $\alpha = \beta = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Donc $\beta \neq 0$ et on a $v = \lambda\, u$ avec $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$. On en déduit les relations suivantes pour les composantes : $v_1 = \lambda\, u_1$, $v_2 = \lambda\, u_2$ et $v_3 = \lambda\, u_3$ et les trois déterminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont nuls.

Réciproquement, si les trois déterminants Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont nuls, on a les trois relations $u_1\, v_2 - u_2\, v_1 = u_2\, v_3 - u_3\, v_2 = u_3\, v_1 - u_1\, v_3 = 0$. Si $u = 0$, alors la famille (u, v) est liée. Si $u \neq 0$, on peut par exemple supposer $u_1 \neq 0$ (la preuve est analogue si $u_2 \neq 0$ ou $u_3 \neq 0$). On peut alors écrire les trois relations $v_1 = \frac{v_1}{u_1} u_1$, $v_2 = \frac{v_1}{u_1} u_2$ et $v_3 = \frac{v_1}{u_1} u_3$ puisque Δ_2 et Δ_3 sont nuls. On en déduit $v = \mu\, u$ avec $\mu = \frac{v_1}{u_1}$ et la famille (u, v) est liée. $\square$

- Intersection de deux plans vectoriels en dimension trois

On se donne un espace vectoriel E_3 de dimension trois et deux plans vectoriels P_1 et P_2 : ce sont des sous-espaces vectoriels de E_3 de dimension deux. Alors ou bien $P_1 = P_2$ et leur intersection $P_1 \cap P_2$ est le plan vectoriel $P_1 = P_2$, ou bien $P_1 \neq P_2$ et l'intersection $P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle D, c'est à dire un sous-espace vectoriel de E_3 de dimension un.

On suppose que les deux plans P_1 et P_2 sont différents et on se donne une base (u_1, v_1) de P_1 et une base (u_2, v_2) de P_2. Alors l'une des deux familles (u_1, v_1, u_2) ou (u_1, v_1, v_2) est libre sinon les deux vecteurs de base de P_2 appartiennent à P_1 et les deux plans sont égaux. Pour fixer les idées, on suppose la famille (u_1, v_1, u_2) libre. On dispose alors de trois vecteurs formant une famille libre dans un espace de dimension trois, donc c'est une base de cet espace vectoriel. On peut développer le vecteur v_2 dans cette base : $v_2 = \alpha\, u_1 + \beta\, v_1 + \gamma u_2$.

On pose $e_3 = v_2 - \gamma u_2 = \alpha\, u_1 + \beta\, v_1$. Ce vecteur est non nul car il est combinaison linéaire des deux vecteurs u_2 et v_2 qui forment une famille libre, avec l'un des coefficients qui est égal à 1. De plus, le vecteur e_3 est combinaison linéaire des vecteurs de base de P_1 d'une part et de P_2 d'autre part. Le sous-espace $D = < e_3 >$ est de dimension 1 et est inclus dans l'intersection $P_1 \cap P_2$: $D \subset P_1 \cap P_2$.

Montrons maintenant que $P_1 \cap P_2 \subset D$. On construit une nouvelle base de P_1 en privilégiant le vecteur e_3 ; on la note (e_1, e_3). On fait de même avec P_2 et on considère une base de P_2 de la forme (e_2, e_3). Le vecteur e_2 n'appartient pas au sous-espace $< e_1, e_3 >$ engendré par e_1 et e_3 car alors on a $P_1 = P_2$, exclu par hypothèse. Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille libre et c'est une base de l'expace vectoriel E de dimension trois. On cherche maintenant quelle est l'intersection $P_1 \cap P_2$. Soit $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3$ appartenant à cette intersection. Comme $x \in P_1$, il ne se décompose que sur les vecteurs e_1 et e_3, donc $x_2 = 0$. De façon analogue, $x \in P_2$ donc ses seules composantes non nulles *a priori* sont sur les vecteurs e_2 et e_3 et $x_1 = 0$. On déduit des considérations précédentes qu'on a nécessairement $x = x_3\, e_3$ et $x \in D$. Donc on a l'inclusion $P_1 \cap P_2 \subset D$ et le résultat est démontré. $\square$

Exercices

- Un déterminant d'ordre quatre

Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix} = \left(a^4 - 1\right)^3$.

- Bases de $\mathbb{R}^3$

a) À quelle condition sur les nombres réels a et b la famille de vecteurs

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? $[a\,b \neq 0]$

b) Même question avec les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

$[a\,b\,(a+b) \neq 0]$

- Un autre déterminant d'ordre quatre

Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & -11 & 2 \end{vmatrix} = -24.$

- Un déterminant d'ordre trois

Montrer que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = a\,b\,c\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$.