le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 2 Matrices

- Définition des matrices

On se donne deux nombres entiers n et m supérieurs ou égaux à 1. Une matrice A à n lignes et m colonnes est un tableau de nm nombres a_{ij}. L'entier i est l'indice de ligne $(1 \leq i \leq n)$ et j est l'indice de colonne $(1 \leq j \leq m)$. On note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ ou plus simplement $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$. Le nombre a_{ij} est appelé "élément de matrice $(i,\, j)$ de la matrice A".

Pour $n = m = 1$, une matrice est un simple nombre. Pour $n = 2$ et $m = 1$, la matrice $A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une matrice colonne ; on parle aussi un "vecteur colonne" si $m = 1$. Si $n = 1$ et $m = 2$, on a par exemple $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ et la matrice A est dans ce cas un "vecteur ligne". Si $n = m = 2$, la matrice A est une matrice carrée d'ordre deux : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Nous notons $\mathcal{M}_{nm}$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les nombres qui composent ses éléments. S'il faut préciser où vivent les éléments de matrice, on introduit la notation $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ dans le cas des nombres réels ou $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$ pour les nombres complexes. Pour les matrices carrées, on simplifie la notation et $\mathcal{M}_n \equiv \mathcal{M}_{nn}$.

Dans $\mathcal{M}_{nm}$, la matrice nulle, notée simplement 0, est composée uniquement de zéros : $0_{ij} = 0$ pour toute ligne i et toute colonne j.

- Égalité de deux matrices

On dit que les matrices A et B sont égales lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) le nombre n de lignes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B

(ii) le nombre m de colonnes de la matrice A est égal au nombre de colonnes de la matrice B

(iii) pour tout i et j tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, les éléments de matrice a_{ij} et b_{ij} sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour toute ligne i et toute colonne j.

On retiendra surtout qu'on ne peut pas comparer deux matrices qui n'ont pas les mêmes dimensions.

François Dubois, février 2023.

• Somme de deux matrices

On peut ajouter deux matrices qui ont toutes deux le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes. Si $A \in \mathscr{M}_{nm}$ et $B \in \mathscr{M}_{nm}$, alors $A+B \in \mathscr{M}_{nm}$ et l'élément de matrice $(i,\, j)$ de la matrice $A+B$ vaut $a_{ij} + b_{ij}$.
L'addition des matrices est commutative : on a $A+B = B+A$ dès que la somme peut être effectuée.

• Multiplication d'un scalaire par une matrice

Si λ est un nombre et $A \in \mathscr{M}_{nm}$ une matrice à n lignes et m colonnes, alors λA est une matrice à n lignes et m colonnes et son élément de matrice $(i,\, j)$ est égal à $\lambda\, a_{ij}$ pour toutes les valeurs de i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.
On a toujours $(\lambda + \mu)A = (\lambda A) + (\mu A)$, $(\lambda\, \mu)A = \lambda(\mu A)$ et $\lambda\,(A+B) = (\lambda A) + (\lambda B)$.
En pratique, on utilise cette opération de multiplication par un scalaire pour factoriser un nombre. Par exemple pour une matrice carrée d'ordre deux, on a $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

• Transposition

Si $A \in \mathscr{M}_{nm}$, sa transposée A^{t} appartient à $\mathscr{M}_{mn}$: on l'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice A. Si l'élément de matrice $(i,\, j)$ de A est égal à a_{ij}, l'élément (j, i) de A^{t} vaut également a_{ij}.
On remarque que la transposée de la matrice transposée est identique à la matrice initiale : $(A^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = A$.

• Produit de deux matrices

On se donne deux matrices $A \in \mathscr{M}_{nm}$ et $B \in \mathscr{M}_{mp}$: le nombre de colonnes de la matrice A et égal au nombre de lignes de la matrice B. Dans ce cas et dans ce cas uniquement, on peut effectuer le produit AB de la matrice A par la matrice B. L'élément de matrice (i, k) de la matrice AB est égal à $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{im} b_{mk}$. En général, même si le produit AB existe, le produit BA n'existe pas.
On considère l'exemple très courant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors $AX = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$.
On remarque que le produit XA n'est pas défini car le nombre [1] de colonnes de X n'est pas égal au nombre [2] de lignes de A.
Par contre, le produit $X^{\mathrm{t}}A$ est bien défini et le résultat est une matrice comportant une ligne et deux colonnes.
Même si les deux produits AB et BA peuvent être calculés, ils définissent en général des matrices d'ordres différents. On pose par exemple $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$ (matrice d'une seule ligne et deux colonnes) et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (matrice de deux lignes et une colonne). Alors $AB = (\alpha\, a + \beta\, b)$ est une matrice à une seule ligne et une seule colonne. Par ailleurs $BA = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta \\ b\alpha & b\beta \end{pmatrix}$ est cette fois une matrice à deux lignes et deux colonnes.

Dès que les opérations écrites ci-dessous ont un sens, on a, pour des matrices A, B et C et des nombres λ et μ, les identités suivantes : $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ et $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

- Associativité du produit des matrices

On se donne trois matrices $A \in \mathscr{M}_{nm}$, $B \in \mathscr{M}_{mp}$ et $C \in \mathscr{M}_{pq}$. Quand on effectue le produit AB, on trouve une matrice à n lignes et p colonnes. On peut donc multiplier cette matrice AB à droite par la matrice C et le produit de matrices $(AB)C$ est bien défini dans $\mathscr{M}_{nq}$. De façon analogue, on peut effectuer le produit BC des matrices B et C : c'est une matrice à m lignes et q colonnes. On peut donc la multiplier à gauche par la matrice A : la matrice $A(BC)$ est bien définie et elle appartient encore à $\mathscr{M}_{nq}$. L'associativité du produit des matrices exprime que $(AB)C = A(BC)$: on place les parenthèses comme on veut quand on doit faire le produit de trois matrices ou plus.

- Transposition et produit

Si le produit AB des deux matrices A et B est bien défini, alors le produit $B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$ des transposées est lui aussi bien défini et on a $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.

- Produit de matrices carrées

Rappelons qu'une matrice carrée a le même nombre de lignes et de colonnes, appelé aussi ordre de la matrice. Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, le produit AB est toujours défini et c'est une matrice carrée d'ordre n. On remarque qu'il en est de même du produit BA.
Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, on peut toujours calculer les produits AB et BA. Il sont en général différents. L'ordre dans lequel on effectue le produit de deux matrices est toujours important ; le produit des matrices carrée n'est pas commutatif.
On a par exemple, avec $n = 2$:
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

- Matrice identité

La matrice identité I a tous ses éléments nuls, sauf ses élémets diagonaux $(j = i)$ pour lesquels $\mathrm{I}_{ij} = 1$. Si on introduit le symbole de Kronecker δ_{ij} tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, on a $\mathrm{I}_{ij} = \delta_{ij}$. Tout comme le nombre 1 pour la multiplication des nombres usuels, la matrice identité est un élément neutre pour la multiplication des matrices : $A\mathrm{I} = \mathrm{I}A = A$ pour toute matrice carrée A.

- Diviseurs de zéro

Dans l'ensemble $\mathscr{M}_n$ (qui a une structure d'anneau pour l'addition des matrices et leur multiplication), il existe des “diviseurs de zéro”. On peut trouver des matrices A et B toutes deux non nulles telles que leur produit est nul. Le produit de deux matrices carrées peut être nul sans qu'aucun des facteurs ne soit nul : on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = 0$, matrice nulle. On a aussi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

• Inverse d'une matrice carrée

On se donne une matrice carrée A d'ordre n. Si on peut trouver une matrice X telle que $AX = XA = \mathrm{I}$, la matrice A est inversible. On pose $X = A^{-1}$. De plus, la matrice X n'est pas nulle sinon on aurait $0 = \mathrm{I}$.

Si la matrice carrée A est inversible, la matrice inverse A^{-1} est unique.

On a par exemple $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$.

Attention ! Il existe des matrices non nulles et non inversibles. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rencontrée plus haut n'est pas inversible. Si elle l'était, il existerait une matrice X non nulle de sorte que $XA = \mathrm{I}$. Mais si on multiplie cette égalité à droite par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, il vient d'une part $XAB = (XA)B = \mathrm{I} \times B = B$ qui est une matrice non nulle et d'autre part $XAB = X(AB) = X \times 0 = 0$, ce qui est contradictoire.

• Inverse d'une matrice d'ordre deux

La matrice carrée deux par deux générale $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si le déterminant de A, $\det A \equiv ad - bc$ est non nul. Dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour déterminer la matrice inverse de A, on résout le système linéaire général $AX = B$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et de second membre $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. L'expression de x en fonction de α et β détermine la première ligne de A^{-1} ; l'expression de y en fonction de α et β détermine la seconde ligne de la matrice inverse [exercice : vérifier ces propriétés].

Si $ad - bc = 0$, les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sont deux diviseurs de zéro : $A\widetilde{A} = 0$. On a aussi $\widetilde{A}A = 0$.

Exercices

• Puissances entières d'une matrice

On se donne un nombre a et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose par convention $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = A^2 A = AA^2$, *etc.*

a) Pour $a = 1$ et n entier naturel, proposer une expression algébrique pour la matrice A^n.

b) Démontrer par récurrence que l'expression proposée à la question a) donne effectivement la puissance n^{e} de la matrice A.

c) Reprendre les questions a) et b) avec un nombre a arbitraire. $\left[A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

- Commutateur

On considère la matrice à deux lignes et deux colonnes suivante $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'inverse de la matrice J est égale à la matrice J elle-même.

b) Déterminer l'ensemble C de toutes les matrices X à deux lignes et deux colonnes qui commutent avec la matrice J ; $X \in C$ si et seulement si $XJ = JX$.

c) Montrer que l'ensemble C est composé uniquement des combinaisons linéaires des matrices I et J.

- Associativité du produit des matrices

On note $\mathscr{M}_n$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes. On se donne trois matrices A, B et C dans $\mathscr{M}_n$.

a) Calculer l'élément $(AB)_{ik}$ à l'intersection de la i^{e} ligne et la k^{e} colonne de la matrice AB.

b) En déduire l'élément $\big((AB)C\big)_{iq}$ de la i^{e} ligne et la q^{e} colonne de la matrice $(AB)C$.

c) Calculer l'élément $(BC)_{jq}$ à l'intersection de la j^{e} ligne et la q^{e} colonne de la matrice BC.

d) En déduire l'élément $\big(A(BC)\big)_{iq}$ à l'intersection de la i^{e} ligne et la q^{e} colonne de la matrice $A(BC)$.

e) Déduire des questions b) et d) la propriété d'associativité du produit des matrices carrées : $(AB)C = A(BC)$.

- Changement de base

On se donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que l'inverse P^{-1} de la matrice P peut s'écrire $P^{-1} = \frac{1}{2}P$.

b) Calculer les produits $P^{-1}A$ et AP.

c) En déduire, en effectuant le calcul de deux façons, que l'on a : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Inverse d'un produit

On se donne deux matrices A et B à n lignes et n colonnes. On les suppose inversibles.

a) Rappeler les propriétés satisfaites par les inverses A^{-1} et B^{-1}.

b) Démontrer que pour calculer l'inverse de la matrice produit AB, on doit faire le produit des inverses en échangeant les facteurs : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

c) Que vaut $(BA)^{-1}$?

- Opérations matricielles (d'après Françoise Santi)

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Parmi les opérations suivantes, indiquer celles qui sont possibles et celles qui sont impossibles : $A+B$, $A+C$, $B+C$, AC, CA, BC, A^2, B^2, A^{-1} et B^{-1}.

b) Effectuer les opérations possibles, en considérant les matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$.

- Transposition (d'après Françoise Santi)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Parmi les opérations suivantes, effectuer celles qui sont possibles :
AB, $A\,(A^{\rm t})$, $A\,a$, aA, $A\,(a^{\rm t})$, $(b^{\rm t})A$, $B\,a$ et $B\,b$.
b) Des résultats de la question précédente, déduire (sans calcul) les valeurs de $a\,(A^{\rm t})$, $(B\,b)^{\rm t}$ et $(b^{\rm t})\,B$.
c) Déterminer $a\,(A^{\rm t})\,B\,b$ et $(b^{\rm t})\,A\,(A^{\rm t})\,b$.

- Matrices triangulaires inférieures d'ordre trois

On se donne trois nombres réels a, b et c et on pose $T(a,\,b,\,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice carrée d'ordre 3 : $T(a,\,b,\,c) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Calculer le produit $T(a,\,b,\,c)\,T(a',\,b',\,c')$ et montrer qu'il est de la forme $T(\alpha,\,\beta,\,\gamma)$; le produit de deux matrices triangulaires inférieure est encore une matrice triangulaire inférieure.
b) Calculer les nombres α, β et γ en fonction des six nombres a, a', b, b', c et c'.
c) En déduire qu'on peut toujours déterminer l'inverse de la matrice $T(a,\,b,\,c)$ sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure que l'on précisera.

$$\big[T(a,\,b,\,c)^{-1} = T(-a,\,-b+ac,\,-c)\big]$$