Département de Mathématiques et Statistiques

Applications de l'Analyse à la Géométrie
et Introduction à l'Algèbre Linéaire **(MVA006)**

Devoir 3
à rendre pour la séance numéro 10, le 19 avril 2022

Projection orthogonale sur un plan affine

On se donne un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$ de l'espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}_3$. On considère le plan affine P d'équation $x + y + z = 1$. On introduit le plan vectoriel Π qui dirige le plan affine P.

1) Montrer que le point A de coordonnées $(\frac{1}{3},\, \frac{1}{3},\, \frac{1}{3})$ appartient à P.

2) Montrer que le vecteur $\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_2)$ est un vecteur unitaire de Π.

3) Montrer que le vecteur $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(e_1 + e_2 - 2\, e_3)$ appartient au plan vectoriel Π, est unitaire et est orthogonal à ε_1.

4) Calculer les composantes du vecteur $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$.

5) Quelle est la matrice de passage R entre les deux bases orthonormées $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ et $(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$?

6) Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $(\mathrm{O}\,;\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$?

7) Montrer que si un point M appartient au plan P, il existe deux réels α et β de sorte que $M = A + \alpha\, \varepsilon_1 + \beta\, \varepsilon_2$.

On se propose de projeter orthogonalement le point B, de coordonnées $(2,\, 3,\, 4)$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$, sur le plan affine P. Pour cela, on cherche un point Q du plan P dont la distance euclidienne de B à Q est toujours plus petite que la distance euclidienne de B à tout point M de P : $\quad Q \in P$ et $\forall M \in P,\ d(B,\, Q) \leq d(B,\, M)$.

8) Le point B appartient-il au plan P ?

9) Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $(\mathrm{O}\,;\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$?

10) En utilisant le repère $(\mathrm{O}\,;\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$, exprimer la valeur du carré de la distance euclidienne $d(B,\, M)$ en fonction de α et β.

11) Montrer que l'expression $(d(B,\, M))^2$ est minimale pour une valeur du couple $(\alpha,\, \beta)$ que l'on précisera.

12) En déduire les coordonnées (dans le repère $(\mathrm{O}\,;\, \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$) du point $Q \in P$ qui minimise la distance $d(B,\, M)$ pour tous les points M du plan P.

13) Que vaut la distance euclidienne $d(B,\, Q)$ entre les points B et Q ?

14) Quelles sont les coordonnées du point Q dans le repère initial $(\mathrm{O}\,;\, e_1,\, e_2,\, e_3)$?

15) On introduit la droite affine D passant par B et de vecteur directeur ε_3. Montrer que le point Q étudié dans les questions précédentes est aussi le point d'intersection de la droite D et du plan P.

François Dubois, 29 mars 2022.