le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 4 Changement de base

• Rappel : expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

On se donne un espace E de dimension n, un espace F de dimension p et une application linéaire u de E dans F. On se donne aussi une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de l'espace F. Pour $j = 1, \ldots, n$, le vecteur $u(e_j)$ image d'un vecteur de la base de E se décompose de façon unique dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$: il existe des coefficients uniques $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ de sorte que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot f_i$. La matrice M_u relativement aux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de F s'écrit $\big(M_u\big)_{ij} = a_{ij}$ pour $1 \le i \le p$ et $1 \le j \le n$.

Si on se donne un vecteur $x \in E$, on le décompose dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$: $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$. On regroupe les composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du vecteur x sous la forme d'un vecteur X composé d'une colonne et n lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. De même, les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_p$ du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \cdot f_i$ dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de F sont représentées avec un vecteur Y à une colonne et p lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$.

Alors les coordonées $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice M_u par le vecteur X : $Y = M_u \cdot X$. Les coordonnées du vecteur image s'obtiennent en multipliant la matrice de l'opérateur par les coordonnées du vecteur de l'espace de départ.

• Composition des applications linéaires et produit de matrices

On dispose de trois espaces vectoriels D, E et F de dimensions respectives q, n et p et deux applications linéaires $v : D \longrightarrow E$ de D dans E et $u : E \longrightarrow F$ de E dans F. On a alors le diagramme suivant $D \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$ qui permet de définir l'application composée $u_\circ v$: $(u_\circ v)(\xi) = u\big(v(\xi)\big)$ pour tout vecteur $\xi \in D$. L'application composée $u_\circ v$ est elle aussi linéaire. On se donne une base $(d_1, d_2, \ldots, d_q)$ de l'espace D en plus des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ des espaces E et F. On suppose que $v(d_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j$. Alors dans les bases (d_k) et (e_j), l'application v est représentée par une matrice M_v à n lignes et q colonnes qui s'écrit $M_v = \big(b_{jk}\big)_{1 \le j \le n,\, 1 \le k \le q}$. On a alors $(u_\circ v)(d_k) = \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\big) f_i$ ce qui signifie que

François Dubois, mars 2022.

relativement aux bases (d_k) et (f_i), l'application composée $u_\circ v$ est représentée par une matrice $M_{u_\circ v} = (c_{ik})$ à p lignes et q colonnes avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq k \leq q$. La matrice $M_{u_\circ v}$ est égale au produit des matrices M_u et M_v: $M_{u_\circ v} = M_u M_v$.

- Conditions de bijectivité d'un endomorphisme

Un endomorphisme de l'espace vectoriel E est une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ de l'espace E dans lui-même. On rappelle que le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E,\ u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. L'application u est injective (c'est à dire pour tout $b \in E$, l'équation $u(x) = b$ a au plus une solution) si et seulement si $\ker u = \{0\}$.
L'image $\mathrm{Im}\, u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de l'espace d'arrivée (ici égal à E lui même), qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: on a donc
$\mathrm{Im}\, u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in E,\ \exists x \in E, y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E. L'application u est surjective (c'est à dire pour tout $b \in E$, l'équation $u(x) = b$ a au moins une solution) si et seulement si $\mathrm{Im}\, u = E$.
On a les équivalentes suivantes : l'endomorphisme (u est bijectif) si et seulement si (u est injectif) si et seulement si ($\ker u = \{0\}$) si et seulement si (u est surjectif) si et seulement si ($\mathrm{Im}\, u = E$) et enfin si et seulement si (u transforme toute base de E en une base de E).

- Conservation des dimensions

Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E, on a la relation $\dim(\mathrm{Im}\, u) + \dim(\ker u) = \dim E$.

- Endomorphisme bijectif et matrice inversible

On se donne un espace vectoriel E de dimension finie n et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_n)$ de E. On considère un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice M_u relativement à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots, e_n)$. Alors u est bijectif si et seulement si la matrice M_u est inversible.

- Un premier exemple

On se donne un espace E de dimension 3, une base $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ de E et une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E)$ de matrice associée $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = 2e_1 + e_2$ et $u(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3$. On peut alors vérifier que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une nouvelle base de l'espace E. L'application u est bijective et la matrice associée A_1 est inversible.

- Un second exemple

Toutes choses égales par ailleurs, on considère l'endomorphisme $v \in \mathscr{L}(E)$ de matrice associée $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On peut calculer le noyau de v: il est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\ker v = \{\,\theta \cdot (5, -2, 1)^{\mathrm{t}},\ \theta \in \mathbb{R}\}$, relation que l'on peut aussi écrire $\ker v =< (5, -2, 1)^{\mathrm{t}} >$. Le noyau de l'endomorphisme n'est pas réduit au vecteur nul ; donc l'opérateur v n'est pas injectif et il n'est pas bijectif non plus. En ce qui concerne l'image $\mathrm{Im} v$, elle est engendrée par les vecteurs e_1, $2e_1 + e_2 + 2e_3$ et $-e_1 + 2e_2 + 4e_3$. Un calcul algébrique montre qu'on a

$\mathrm{Im}\, v =< e_1, e_2 + 2e_3 >$ qui est une famille libre mais composée de deux vecteurs seulement. L'endomorphisme v ne transforme pas toute base de E en une autre base de E ; la dimension de $\mathrm{Im}\, v$ est égale à deux ; l'application v n'est pas surjective.

- Résolution d'un système linéaire

On se donne une matrice A carrée ; elle a le même nombre n de lignes et de colonnes. On peut la voir comme la matrice d'un opérateur u d'un espace E de dimension n dans lui-même une fois que l'on s'est donné une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. On peut aussi spécifier l'espace E et choisir $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On pose alors $\ker A = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = 0\}$ et $\mathrm{Im} A = \{AX, X \in \mathbb{R}^n\}$. On se donne un second membre $B \in \mathbb{R}^n$ (un vecteur colonne formé de n nombres) et on cherche $X \in \mathbb{R}^n$ solution du système linéaire
(1) $AX = B$.
Le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est bijectif. On peut exprimer aussi cette condition sous une forme plus algébrique : le système (1) a une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible. Grâce aux conditions de bijectvité d'un endomorphisme, la condition précédente équivaut à : le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est injectif c'est a dire $\ker u = \{0\}$. D'un point de vue plus algébrique, le système (1) a une solution unique si et seulement si $AX = 0$ implique $X = 0$; la seule solution de l'équation homogene $AX = 0$ est la solution triviale $X = 0$ et on a
$\ker A = \{0\}$.
D'autre part, le système (1) a une solution unique si et seulement si l'endomorphisme u est surjectif : $\mathrm{Im}\, u = E$. Pour tout second membre $B \in \mathbb{R}^n$, l'équation (1) a toujours au moins une solution. Dans ce cas, on a $\mathrm{Im} A = \mathbb{R}^n$.

- Rang d'une matrice carrée

On se donne un entier $n \geq 1$ et une matrice carrée A. Le rang de A est la dimension de son image : $\mathrm{rg} A = \dim(\mathrm{Im} A)$. Un opérateur linéaire de matrice carrée A est surjectif si et seulement si $\mathrm{rg} A$ est maximal.

- Critère pratique pour garantir qu'un système linéaire carré a une solution unique

L'équation (1) a une solution unique si et seulement si l'équation homogène $AX = 0$, obtenue en remplaçant B par zéro dans le membre de droite de (1), a pour seule solution $X = 0$.

- Exemple de système linéaire "mal posé"

Un systeme linéaire (1) est mal posé s'il n'a pas une solution unique quel que soit le second membre $B \in \mathbb{R}^n$. Avec la matrice A_2 introduite plus haut dans cette leçon, le système
$A_2 X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ n'a pas de solution. Le vecteur $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'image de B.

Par contre, toutes choses égales par ailleurs, le système $BX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ a une infinité de solutions.

- Changement des coordonnées d'un vecteur lors d'un changement de base

On se donne un espace vectoriel E de dimension n et une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \, e_j$. Les nombres x_j sont les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur colonne (matrice à n lignes et une colonne) des coordonnées de x. Comment ce vecteur se transforme-t-il quand on change de base ?

On se donne une autre base $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n)$ de E. On exprime les nouveaux vecteurs de base par leurs coordonnées dans la base initiale : $\widetilde{e}_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ji} \, e_j$ La matrice de passage P ainsi introduite contient dans sa i-ème colonne les coordonnées du vecteur $\widetilde{e}_i$. La matrice de passage est inversible : si on échange les rôles des deux bases, on voit rapidement que $e_j = \sum_{\ell=1}^{n} (P^{-1})_{\ell j} \, \widetilde{e}_\ell$.
Les coordonnées $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n$ du vecteur x dans la nouvelle base (on a donc $x = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i \, \widetilde{e}_i$) peuvent s'écrire avec un vecteur colonne $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a la relation $X = P \, \widetilde{X}$.

Attention ! Les coordonnées dans la base initiale s'écrivent facilement à l'aide la matrice de passage. La relation $X = P \, \widetilde{X}$ est équivalente à $\widetilde{X} = P^{-1} \, X$. Pour calculer les coordonnées $\widetilde{X}$ du vecteur x dans la nouvelle base à partir de ses coordonnées X dans la base initiale, il faut résoudre le système linéaire $P \, \widetilde{X} = X$ de matrice égale à la matrice de passage P.

- Un exemple de changement de base

On suppose $n = 3$ et la matrice de passage P donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On note $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ les coordonnées dans l'ancienne base et $\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ celles dans la nouvelle base.

On a donc $P \widetilde{X} = X$. On résout ce système linéaire et il vient $\widetilde{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} X$. On a donc complètement explicité la matrice inverse : $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

On vérifie que le résultat est correct :

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Méthode des multiplicateurs (ou méthode de Gauss) pour la résolution d'un système linéaire

On reprend l'exemple vu juste au dessus : $\left\{ \begin{array}{rcl|l|l} x + 2y + 3z & = & \alpha & 1 & 0 \\ -x + 4y + z & = & \beta & 1 & 1 \\ x - y + 0z & = & \gamma & 0 & 1 \end{array} \right.$.

On multiplie les équations par les familles de multiplicateurs écrits dans les colonnes de droite, ce qui permet d'éliminer l'inconnue x. On en déduit alors un système de deux équations à deux inconnues $\left\{ \begin{array}{rcl|r|r} 6y+4z & = & \alpha+\beta & 1 & -1 \\ 3y+z & = & \beta+\gamma & -2 & 4 \end{array} \right.$.

On résout ce système de deux équations à deux inconnues avec les jeux de multiplicateurs indiqués dans les colonne à droite, de façon à éliminer l'inconnue y puis l'inconnue z. On en déduit alors : $2z = \alpha - \beta - 2\gamma$ et $6y = -\alpha + 3\beta + 4\gamma$. On reporte ces valeurs dans la troisième équation du système initial : $x = y + \gamma = \frac{1}{6}(-\alpha + 3\beta + 10\gamma)$. Il vient alors

$\widetilde{X} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 10 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et le résultat utilisé dans le paragraphe précédent est établi.

- Nouvelle matrice dans la nouvelle base

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on se donne une application linéaire u de E dans E. On suppose que la matrice de u dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est égale à A. L'image $y = u(x)$ a des coordonnées Y qui satisfont à la relation $Y = A\,X$. On note $\widetilde{A}$ la matrice du même opérateur u dans la nouvelle base $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_n)$ de E. Alors on a la relation $\widetilde{A} = P^{-1}\,A\,P$.

La preuve de ce résultat est à la fois simple et délicate. On écrit $y = u(x)$ dans l'ancienne base : $Y = A\,X$. Puis on utilise la relation de changement de base pour le vecteur x: $X = P\widetilde{X}$ et pour le vecteur image y: $Y = P\widetilde{Y}$. On en déduit : $P\widetilde{Y} = AP\widetilde{X}$, c'est à dire $\widetilde{Y} = P^{-1}AP\widetilde{X}$. Si on exprime maintenant la relation $y = u(x)$ dans la nouvelle base, on a $\widetilde{Y} = \widetilde{A}\,\widetilde{X}$. On rapproche cette relation de la relation précédente et on a l'égalité $\widetilde{A}\,\widetilde{X} = P^{-1}\,A\,P\,\widetilde{X}$, pour tout vecteur colonne $\widetilde{X} \in \mathbb{R}^n$. On en déduit l'identité $\widetilde{A} = P^{-1}\,A\,P$.

- Système linéaire carré de rang strictement inférieur à sa dimension

On se donne un système linéaire d'ordre n de la forme (1), où la matrice A n'est plus de rang n : $\mathrm{rg}A < n$. La matrice A n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit au seul vecteur nul. Toute application linéaire représentée par la matrice A n'est pas surjective : l'image $\mathrm{Im}A$ de A est incluse dans $\mathbb{R}^n$ mais on a $\mathrm{Im}A \neq \mathbb{R}^n$. Alors de deux choses l'une

(i) $B \in \mathrm{Im}A$. Le système (1) a une infinité de solutions. Si X_0 désigne une solution particulière du système (1) ($AX_0 = B$) et ξ une solution de l'équation homogène ($A\xi = 0$), alors toute solution X du système (1) est de la forme $X = X_0 + \xi$.

(ii) $B \notin \mathrm{Im}A$. Le système (1) n'a pas de solution.

Exercices

- Bases de $\mathbb{R}^3$

a) A quelle condition sur les nombres réels a et b la famille de vecteurs

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

[$ab \neq 0$]

b) Même question avec les trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$.

$[ab\,(a+b) \neq 0]$

- Un système linéaire

a) Résoudre le système linéaire suivant $\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ x+2y-z &= 2 \\ 3x+y+2z &= 1 \end{cases}$

b) Préciser le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Un autre système linéaire

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x-y+z &= 3 \\ 5x+2y-z &= 5 \\ -3x+4y+3z &= 1 \end{cases}$

$[\;(\,\frac{4}{3}\,,\,0\,,\,\frac{5}{3}\,)\;]$

- Factorisation de Gauss pour un système linéaire deux par deux

On se donne la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne B arbitraire dans $\mathbb{R}^2$: $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre le système linéaire (1) $AX = B$.

a) Montrer qu'on peut trouver deux matrices $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $U \equiv \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}$ de sorte que $LU = A$. On déterminera les quatre nombres a, p, q et r.

b) En introduisant un vecteur auxiliaire Y, montrer que la résolution de l'équation (1) se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires : d'abord $LY = B$ puis ensuite $UX = Y$.

c) Achever la résolution du système linéaire (1).

d) Expliciter l'inverse A^{-1} de la matrice A.