le cnam

Applications de l'Analyse à la Géométrie et Introduction à l'Algèbre Linéaire

Cours 3 Opérateurs linéaires

• Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des expaces vectoriels. Ils disposent d'une addition : $(x, y) + (x', y') = (x+x', y+y')$ dans $\mathbb{R}^2$, $(x, y, z) + (x', y' z') = (x+x', y+y', z+z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et d'une multiplication par un scalaire, notée avec un point : $\lambda \cdot (x, y) = (\lambda\, x, \lambda\, y)$ d'une part et $\lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda\, x, \lambda\, y, \lambda\, z)$ d'autre part. Nous avons rencontré lors de la leçon précédente d'autres exemples d'espaces vectoriels : l'ensemble les matrices $\mathscr{M}_{nm}$ à n lignes et m colonnes est un espace vectoriel pour la somme des matrices et leur multiplication par un scalaire.

• Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est la donnée d'un ensemble (de vecteurs) E, d'une addition $E \times E \longrightarrow E$ qui à x, y appartenant à E associe $x+y$, qui est encore un vecteur de E, et d'une multiplication d'un scalaire par un vecteur $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ associe le vecteur $\lambda \cdot x$ de l'espace E.

L'addition dans l'espace E définit un groupe commutatif : $(x+y)+z = x+(y+z)$, $x+y = y+x$, $x+0 = 0+x = x$ et $x+(-x) = (-x)+x = 0$. De plus, la multiplication par un scalaire est cohérente avec l'addition et la multiplication des nombres : $1 \cdot x = x$, $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$, $\lambda \cdot (x+y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$ et $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\, \mu) \cdot x$.

Un espace vectoriel permet de faire de nombreux calculs. Il étend en particulier aux espaces de fonctions les propriétés des vecteurs de l'espace ordinaire.

• Un autre exemple d'espace vectoriel

On note P_1 l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: une fonction φ qui appartient à l'espace P_1 associe à tout nombre réel t le nombre $\varphi(t) = at+b$. Si $\varphi \in P_1$, il existe a et b réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = at+b$. L'addition $\varphi + \psi$ des fonctions φ et ψ est définie par $(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t)$; la multiplication $\lambda \cdot \varphi$ d'une fonction φ par un scalaire λ est définie par $(\lambda \cdot \varphi)(t) = \lambda\, \varphi(t)$.

• Combinaison linéaire

On se donne un entier n et une famille $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs de l'espace vectoriel E. Une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur x qui s'écrit sous la forme $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j$, où les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires.

François Dubois, février 2022.

- Sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si l'addition de E et la multiplication par un scalaire munissent F d'une structure d'espace vectoriel.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble F de l'espace vectoriel E soit un sous espace vectoriel est que toute combinaison linéaire (calculée dans l'espace E) de vecteurs de F appartienne encore à F : pour tous les vecteurs x et y de F, la somme $x+y$ appartient à F et pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F, le produit $\lambda \cdot x$ appartient encore à F.

L'ensemble F des vecteurs lignes x de la forme $x = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

On se donne une famille finie $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs de l'espace vectoriel E. L'ensemble $< x_1, \ldots, x_n >$ de toutes les combinaisons linéaires de la forme $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot x_j$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est par définition le sous-espace vectoriel $< x_1, \ldots, x_n >$ engendré par la famille des n vecteurs.

On se donne par exemple $u_1 = (\frac{1}{2}, 1)$ et $u_2 = (1, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors
$< u_1, u_2 >= \{(\frac{\alpha}{2} + \beta, \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Un autre exemple dans $\mathbb{R}^3$: on pose $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$. Alors
$< u_1, u_2, u_3 >= \{(\alpha - \gamma, -\alpha + \beta, -\beta + \gamma), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

- Famille libre

La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est libre si et seulement si lorsqu'une combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j$ est nulle, alors tous les coefficients α_j sont nuls :
$\big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \ldots x_j = 0\big) \Longrightarrow \big(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\big)$.

La famille de vecteurs (u_1, u_2), où $u_1 = (1, 0)$ et $u_2 = (\frac{1}{2}, 1)$ est libre dans $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la famille (e_1, e_2), avec $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

- Famille liée

La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est liée si et seulement si elle n'est pas libre. C'est le cas si et seulement si il existe une famille de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ non tous nuls, c'est à dire $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0 \ldots, 0)$ de sorte que la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j$ est nulle : $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j = 0$.

Si on se donne par exemple trois points A, B et C dans le plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ forment une famille liée. En effet la relation de Chasles exprime que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$; on a une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls puisqu'ils valent tous 1.

Autre exemple dans $\mathbb{R}^3$, avec $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, 0, 1)$. La famille u_1, u_2, u_3 est liée.

- Famille génératrice

La famille de n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est génératrice si et seulement si tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs :
$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j$.

On pose $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ et $e_3 = (1, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la famille (e_1, e_2).

- Base

On se donne un espace vectoriel E et un entier n supérieur ou égal à 1. Une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E est une famille à la fois libre et génératrice. Tout vecteur x de E s'écrit de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de vecteurs de la base : $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j$. Les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ existent et sont uniques : $\forall x \in E, \exists!\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e_j$.
Les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur $x \in E$ dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
Dans l'espace P_1 des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\varphi_0(t) = 1$ et $\varphi_1(t) = t$. Alors la famille (φ_0, φ_1) est une base de P_1.

- Dimension

Si l'espace vectoriel E admet une base composée de n vecteurs, alors on dit que E est de dimension n: $\mathrm{d}imE = n$.

- Application linéaire

On se donne deux espaces vectoriels E et F. Une application linéaire u de E dans F est une application de E dans F (pour tout x dans E, il existe un unique vecteur image $u(x)$ dans F) telle que pour tout x, y dans E et tout scalaire λ, on a $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $u(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot u(x)$.
Une application linéaire de E dans F respecte les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire dans les espaces E et F ; si l'application linéaire u de E dans F est donnée, alors pour tous les vecteurs x et y de E et tous les nombres α et β, on a
$u(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot u(x) + \beta \cdot u(y)$.
Par exemple, l'identité $\mathrm{i}d$ de $\mathbb{R}^2$ est l'aplication linéaire définie par $\mathrm{i}d(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.
Si on décompose tout vecteur x de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sous la forme $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ dans la base (e_1, e_2), la projection p est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $p(x) = \alpha_1 e_1$.
La symétrie s est l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $s(x) = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$.
Deux autres exemples : $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \longmapsto (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \longmapsto (0, -\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$.

- Endomorphisme

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si les espaces E et F sont égaux, on dit que l'application linéaire u est un endomorphisme de l'espace E dans lui-même. On note alors $\mathscr{L}(E)$ au lieu de $\mathscr{L}(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

- Noyau et image d'une application linéaire

On se donne $u \in \mathscr{L}(E, F)$: u est une une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. Le noyau $\ker u$ est l'ensemble des vecteurs x de E tels que $u(x) = 0$: $\ker u = \{x \in E,\ u(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
L'image $\mathrm{Im}\, u$ est l'ensemble de tous les vecteurs y de F qui peuvent s'écrire sous la forme $y = u(x)$: $\mathrm{Im}\, u = \{u(x), x \in E\} = \{y \in F,\ \exists x \in E, y = u(x)\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F.
Avec les notations précédents, $\ker \mathrm{i}d = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\ \mathrm{i}d = \mathbb{R}^2$. De façon analogue, $\ker p =< e_1 >$ (espace engendré par le vecteur e_1) et $\mathrm{Im}\, p =< e_2 >$ (espace engendré par le vecteur e_2). Enfin,

$\ker s = \{0\}$ et $\mathrm{Im}\, s = \mathbb{R}^2$.

• Matrice d'une application linéaire relativement à une base de E et à une base de F

On se donne un espace E de dimension n, un espace F de dimension p et une application linéaire u de E dans F. On se donne aussi une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et une base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de l'espace F. Pour $j = 1, \ldots, n$, le vecteur $u(e_j)$ image d'un vecteur de la base de E se décompose de façon unique dans la base $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$: il existe des coefficients uniques $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}$ de sorte que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \cdot f_i$. On regroupe ces np coefficients dans une matrice $M_u \equiv \big(a_{ij}\big)_{1\leq i\leq p,\, 1\leq j\leq n}$ à p lignes et n colonnes appelée matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de F.

On écrit la matrice ainsi : $M_u = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de l'image $u(e_j)$ du j^{o} vecteur de base de l'espace de départ E définissent la j^{o} colonne de la matrice M_u.

Si les espaces E et F sont égaux ($F = E$), on choisit alors usuellement la base $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ égale à $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

La matrice de l'identité $\mathrm{i}d$ de l'espace $\mathbb{R}^2$ dans la base (e_1, e_2) s'écrit $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice identité d'ordre 2. Dans les mêmes conditions, la matrice de la projection p est égale à $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Enfin, la symétrie s a pour matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2).

Avec les mêmes notations, la matrice de l'application linéaire u_1 :
$\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \longmapsto u_1(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0, 1)$ est donnée par $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 0, 1)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$, la matrice de l'application linéaire u_2 :

$\mathbb{R}^2 \ni (\alpha, \beta) \longmapsto (0, -\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ vaut $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Expression matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire

Avec les notations précédentes, on regroupe les composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du vecteur $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot e_j$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E sous la forme d'un vecteur X composé d'une seule colonne et de n lignes : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

De même, les coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_p$ du vecteur $y = u(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \cdot f_i$ dans la base

$(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ de F sont représentées avec un vecteur Y à une colonne et p lignes :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Alors les coordonnées $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ s'expriment à l'aide du produit de la matrice A par le vecteur X : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_u \cdot X.$

Les coordonnées Y du vecteur image $u(x)$ s'obtiennent en multipliant la matrice M_u de l'opérateur u par les coordonnées X du vecteur $x \in E$.

Pour $p = 3$, $n = 2$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

- Composition des applications linéaires et produit des matrices

On se donne maintenant trois espaces vectoriels D, E et F de dimensions respectives q, n et p et deux applications linéaires $v : D \longrightarrow E$ de D dans E et $u : E \longrightarrow F$ de E dans F. On a alors le diagramme suivant $D \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F$ qui permet de définir l'application composée $u_\circ v$: $(u_\circ v)(\xi) = u\big(v(\xi)\big)$ pour tout vecteur $\xi \in D$. L'application composée $u_\circ v$ est elle aussi linéaire.

On se donne une base $(d_1, d_2, \ldots, d_q)$ de l'espace D en complément des bases $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ des espaces E et F. On suppose que $v(d_k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} e_j$. Alors dans les bases (d_k) et (e_j), l'application v est représentée par une matrice M_v à n lignes et q colonnes qui s'écrit $M_v = \big(b_{jk}\big)_{1 \le j \le n,\, 1 \le k \le q}$. On a alors $(u_\circ v)(d_k) = \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\big) f_i$ ce qui signifie que relativement aux bases (d_k) et (f_i), l'application composée $u_\circ v$ est représentée par une matrice $M_{u_\circ v} = (c_{ik})$ à p lignes et q colonnes avec $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \le i \le p$ et $1 \le k \le q$. Nous constatons que la matrice $M_{u_\circ v}$ est égale au produit des matrices M_u et M_v: $M_{u_\circ v} = M_u M_v$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pk} & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jk} & \cdots & b_{jq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}.$$

Dans le produit $M_{u_\circ v} = M_u M_v$, on remarque que le nombre n de colonnes de la matrice de gauche (ici M_u) est toujours égal au nombre de lignes n de la matrice de droite (ici M_v). Sinon, le produit $M_u M_v$ ne serait pas défini.

Exercices

• Un opérateur linéaire

On se donne un espace vectoriel E de dimension 3 muni d'une base $(e_1\,,e_2\,,e_3)$. On se donne aussi un espace vectoriel F de dimension 2 et une base $(f_1\,,f_2)$ de cet espace. On considère l'application linéaire u de E dans F qui satisfait aux relations $u(e_1)=f_1-f_2$, $u(e_2)=f_1+f_2$ et $u(e_3)=\frac{1}{2}f_1+f_2$.

a) Quelle est la matrice A de l'application linéaire u relativement aux bases de E et F ?

b) Montrer qu'il existe un vecteur $v\in E$ non nul de sorte que $\ker u=<v>$.

c) Démontrer que $\mathrm{Im}\,u=F$.

d) Vérifier que la relation $\dim E=\dim\ker u+\dim\mathrm{Im}\,u$ est bien satisfaite.

• Un autre opérateur linéaire

On se donne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\big((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\big)$. On se donne également l'application v de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par la relation $v(x,y,z)=x+y+z$.

a) Montrer que l'application v est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

b) Quelle est la matrice B de l'application linéaire v ?

c) Trouver deux vecteurs indépendants θ_1 et θ_2 de $\mathbb{R}^3$ qui appartiennent tous deux au noyau $\ker v$ de l'application linéaire v.

d) Montrer que la famille $(\theta_1\,,\theta_2)$ est une famille génératrice du noyau $\ker v$.

e) En déduire que l'espace $\ker v$ est de dimension 2.

f) Démontrer que $\mathrm{Im}\,v=\mathbb{R}$.

• Une famille de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

On pose $u_1=\big(1,0\big)$, $u_2=\big(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$ et $u_3=\big(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\big)$.

a) Cette famille est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$? Est-elle liée ?

b) Expliciter une combinaison linéaire simple des trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 qui est nulle tout en ayant des coefficients non tous nuls.

• Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$

On pose $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$.

a) Montrer que muni de l'addition des vecteurs et de leur multiplication par les nombres, l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) On pose $u_1=(1,0,0)$ et $u_2=(0,1,0)$. La famille (u_1,u_2) est-elle une base de E ?

c) On pose $v_1=(1,0,-1)$, $v_2=(-1,1,0)$ et $v_3=(0,-1,1)$. La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle une base de E ?

d) On pose $w_1=(1,-1,0)$ et $w_2=(0,-1,1)$. La famille (w_1,w_2) est-elle une base de E ?

• Un exemple de composition des applications linéaires

On note $b_1=(1,0)$, $b_2=(0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,0,1)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On se donne l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ par les relations $f(e_1)=4\,\varepsilon_1+2\,\varepsilon_3$, $f(e_2)=8\,\varepsilon_2-\varepsilon_3$ et $f(e_3)=\varepsilon_4$.

On se donne aussi une application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ par $g(\varepsilon_1) = (1, 1)$, $g(\varepsilon_2) = (0, 1)$, $g(\varepsilon_3) = (1, 0)$ et $g(\varepsilon_4) = (-1, -1)$.

a) Quelle est la matrice M_f de f relativement aux bases (e_1, e_2, e_3) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$?

b) Quelle est la matrice M_g de g relativement aux bases $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et (b_1, b_2) ?

c) Quel est l'ensemble de départ de l'application $g_\circ f$ et quel est son ensemble d'arrivée ?

d) Calculer les images de $(g_\circ f)(e_j)$ pour $j = 1,\ 2,\ 3$ dans la base (b_1, b_2).

e) En déduire la matrice $M_{g_\circ f}$ relativement aux bases précédentes.

f) Vérifier que $M_{g_\circ f} = M_g\, M_f$.

• Trois vecteurs en dimension deux

On se donne une base (e_1, e_2) d'un espace vectoriel de dimension deux et u, v, w trois vecteurs de cet espace. On se propose de démontrer que ces trois vecteurs sont toujours liés.

a) Montrer que si l'un des trois vecteurs u, v, w est nul, alors la famille (u, vw) est liée.

Si les trois vecteurs u, v, w sont non nuls, on suppose donné leur développement dans la base (e_1, e_2): $u = \alpha e_1 + \beta e_2$, $v = \gamma e_1 + \delta e_2$ et $w = \varepsilon e_1 + \varphi e_2$.

b) On cherche des réels x, y, z de sorte que la combinaison linéaire $xu + yv + zw$ soit nulle. Montrer qu'alors les nombres y et z satisfont à la relation $(\alpha\delta - \beta\gamma)y - (\beta\varepsilon - \alpha\varphi)z = 0$.

c) Si $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$, montrer que les deux vecteurs u et v sont liés. En déduire que les trois vecteurs u, v et w sont liés.

d) Si $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, montrer que le choix $x = \gamma\varphi - \delta\varepsilon$, $y = \beta\varepsilon - \alpha\varphi$ et $z = \alpha\delta - \beta\gamma$ assure la relation $xu + yv + zw = 0$ avec $z \neq 0$. En conclure que la famille (u, v, w) est encore liée dans ce cas de figure.

• Trois sous-ensembles du plan

On se donne les trois sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants : $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| = 1\}$. Pour chacun de ces trois ensembles, répondre aux deux questions suivantes.

a) Dessiner l'ensemble considéré.

b) L'ensemble étudié en a) est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?