

#### Devoir 4

à rendre pour la séance numéro 13, le 21 mai 2019

#### Expression du Laplacien en coordonnées polaires

On se donne un repère orthonormé direct  $(O; e_1, e_2)$  du plan affine euclidien  $\mathcal{E}_2$ . Un point  $M$  arbitraire du plan a des coordonnées cartésiennes  $x, y$  dans le repère  $(O; e_1, e_2)$  de sorte que  $\overrightarrow{OM} = x e_1 + y e_2$ . Il a aussi des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de sorte que  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ .

On se donne une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  ayant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le Laplacien  $\Delta f$  de la fonction  $f$  est la fonction de deux variables définie par  $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ .

- 1) Calculer le laplacien de la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .
- 2) Sachant que  $r^2 = x^2 + y^2$ , montrer que les dérivées partielles  $\frac{\partial r}{\partial x}$  et  $\frac{\partial r}{\partial y}$  sont respectivement égales à  $\frac{x}{r} = \cos \theta$  et  $\frac{y}{r} = \sin \theta$ .
- 3) De même, partant de la relation  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ , montrer que l'on a  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \sin \theta$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta$ .

On exprime  $f$  en coordonnées polaires ; il existe donc une fonction  $g(r, \theta)$  de sorte que  $f(x, y) \equiv g(r, \theta)$ . De façon plus précise, la fonction  $g$  satisfait à  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ .

- 4) Que vaut la fonction  $g$  si  $f(x, y) = x^2 + y^2$  ? Même question pour  $f_1(x, y) = \frac{y}{x}$ .
- 5) Montrer avec la règle de dérivation des fonctions composées et les résultats des questions 2) et 3) que l'on a  $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta}$ .
- 6) Afin de dériver une nouvelle fois par rapport à  $x$  la première expression et par rapport à  $y$  la seconde, montrer en utilisant les relations précédentes pour des fonctions bien choisies, que l'on a  $\frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta) = \frac{1}{r} \sin^2 \theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r} \sin \theta) = -\frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta) = \frac{1}{r} \cos^2 \theta$  et  $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r} \cos \theta) = -\frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta$ .
- 7) A partir des relations  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial g}{\partial \theta})$ , de la règle de dérivation d'un produit et des relations proposées à la question 6), en déduire les expressions de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  et fonction de  $r, \theta, \frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta}$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ . Attention, chacun des résultats pour  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  comporte cinq termes !
- 8) Déduire de la question précédente que  $\Delta f(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial g}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$ .