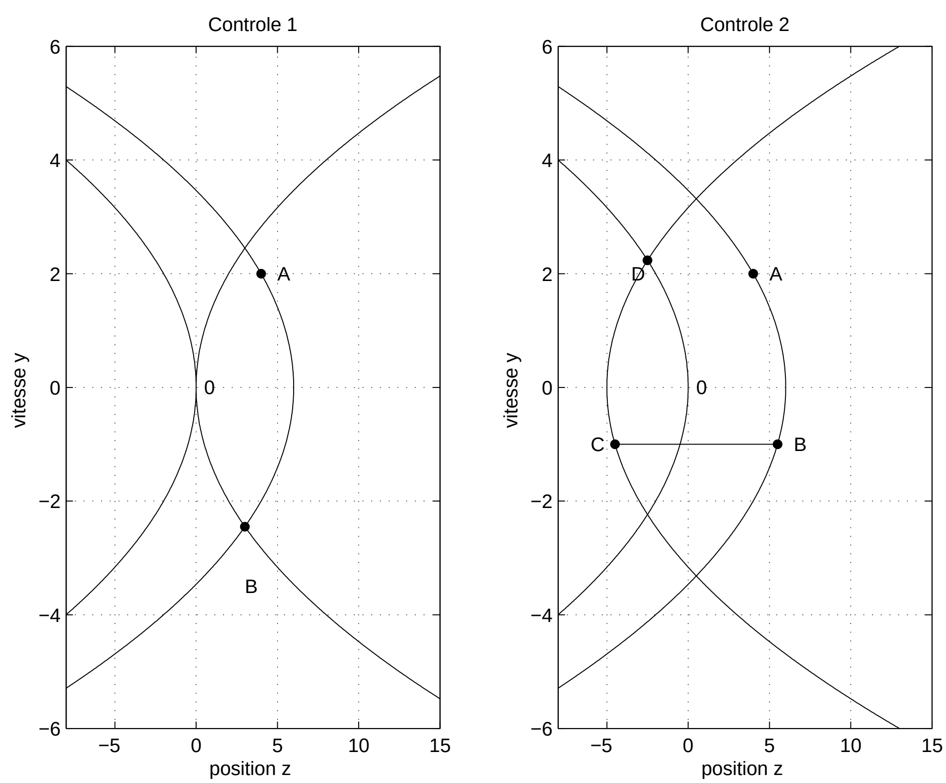
Exercices du cours de M2

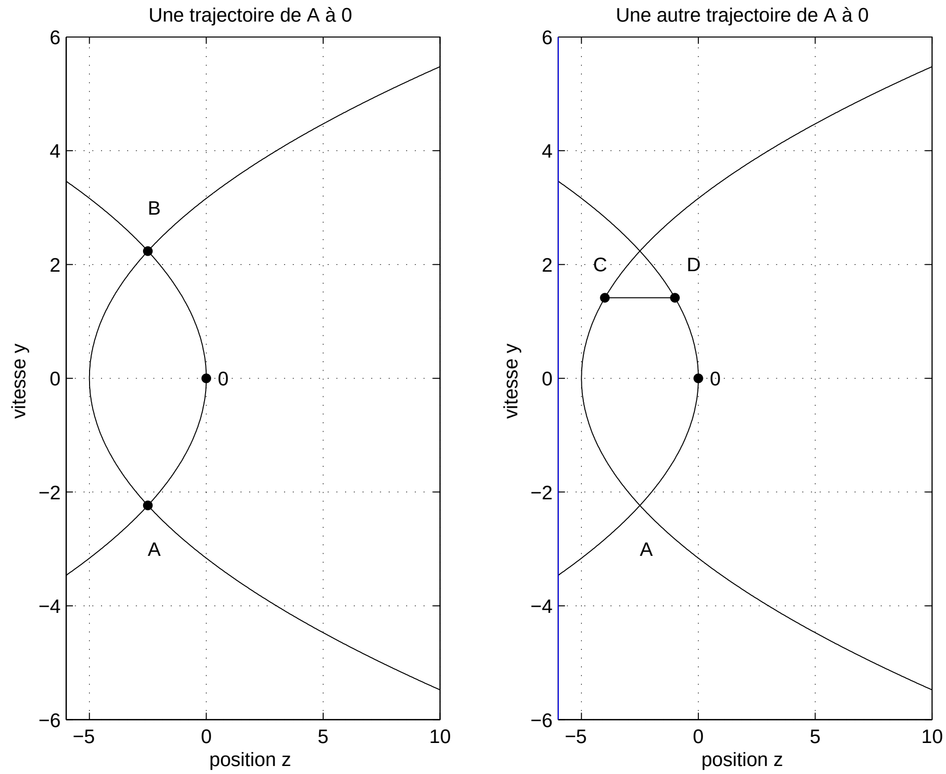
Modélisation du comportement hydrodynamique des bateaux

Philippe Destuynder et Caroline Fabre

1. Le mouvement du ludion obéit à l'équation $z'' = u$ avec comme données la position et la vitesse intiales (z_0, z_1). Déterminer graphiquement l'ensemble des données initiales contrôlables en temps fini lorsque le contrôle ne peut prendre que deux valeurs : 0 et 1 (au lieu des 3 comme en cours). Cet ensemble est défini par :
   $E = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{R}^2,\ \ \exists T > 0, \exists u : [0, T] \rightarrow \{0, 1\},\ \ \text{tel que}\ \ z(T) = z'(T) = 0\}.$
2. On considère maintenant le cas d'un contrôle à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ comme cela a été vu en cours. On propose ci-dessous deux trajectoires partant du point $A(4, 2)$ qui sont AB0 et ABCD0. Donner la loi de contrôle $u(t)$ dans les deux cas (faire une résolution graphique uniquement).



3. Parmi les deux deux trajectoires AB0 et ACD0 ci-dessous, laquelle est la plus rapide ?



4. Faire une résolution graphique des problèmes de contrôle du bathyscaphe et du bateau flottant lorsque le contrôle est à valeurs dans $\{-u, 0, u\}$.
5. Calculer la différence de volume d'eau déplacée lors du tangage du bateau.
6. (notation du cours) Si G est le centre de gravité géométrique du triangle $\mathcal{T}$ délimité par Γ_1 et Γ_+, calculer le moment en G de la force de pression p s'exerçant sur $\mathcal{T}$. Rappel : ce moment vaut $M = \displaystyle\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_+} pGm \wedge \nu(m) ds$ et, en utilisant la formule de Torricelli (1653), $p = p_0 - \rho g x_3$.

7. On note $V = H^{1/2}_{m0}$. On considère l'application $\Lambda : H^{-1/2}_{m0} \;\rightarrow\; (H^{1/2}_{m0})'$ définie par

$$< \Lambda(u), v >_{V',V} = < u, v >_{-1/2,1/2} .$$

Montrer que Λ est linéaire continue de $H^{-1/2}_{m0}$ dans V'. Montrer que Λ est d'image fermée puis que Im $\Lambda^{\perp} = \{0\}$ (l'orthogonal est pris dans V au sens de la dualité) . En déduire que V' s'identifie à $H^{-1/2}_{m0}$ avec équivalence des normes.

8. Soit $W = \{u \in L^2(\Omega), \quad \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ muni du produit scalaire

$$((u, v))_W = (u, v)_{0,\Omega} + (\Delta u, \Delta v)_{0,\Omega}.$$

Vérifier que W est un Hilbert et qu'il est dense dans $L^2(\Omega)$.

On rappelle que l'application $v \in H^2(\Omega) \;\rightarrow\; (v, \dfrac{\partial v}{\partial \nu}) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ est linéaire continue surjective(cf Brezis, Adams, Lions -Magenes tome 1, Dautray-Lions t3).

En considérant la formule (vraie pour les fonctions régulières)

$$\int_\Omega \Delta u \;\; v + \int_\Omega \Delta v \;\; u = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu},$$

montrer que pour $u \in W$, on peut définir $(u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$ de telle sorte que l'on ait :

(i) pour tout $(u, v) \in W \times H^2(\Omega)$

$$\int_\Omega \Delta u \;\; v + \int_\Omega \Delta v \;\; u = < \frac{\partial u}{\partial \nu}, v >_{\frac{-3}{2},\frac{3}{2}} - < u, \frac{\partial v}{\partial \nu} >_{\frac{-1}{2},\frac{1}{2}} .$$

(ii) l'application $u \in W \rightarrow (u, \dfrac{\partial u}{\partial \nu}) \in H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-3/2}(\Gamma)$ est linéaire continue.

9. (i) Notation du cours et Ω est un ouvert connexe borné 1-régulier de $\mathbb{R}^d$. V est un Hilbert qui s'injecte de façon compacte dans H.

Montrer que toute forme bilinéaire a, continue sur V telle que

(a) $\forall v \in V, v \neq 0, \;\; a(v, v) > 0$

(b) $\exists p > 0, \exists c > 0, \forall v \in V, \; a(v, v) + p(v, v)_H \geq c||v||^2_V$

est coercive sur V.

(ii) Soit a une forme bilinéaire symétrique a, continue sur V telle que

$$\exists p > 0, \exists c > 0, \forall v \in V, \; a(v, v) + p(v, v)_H \geq c||v||^2_V.$$

On note Ker $a = \{w \in V, \; \forall v \in V, \; a(w, v) = 0\}$. Soit $l \in V'$. On s'intéresse au problème : trouver $u \in V$ tel que

$$(E) \qquad\qquad \forall v \in V, \qquad a(u, v) = l(v)$$

Démontrer que l'une des conditions suivantes est réalisée :

• Soit Ker $a = \{0\}$ et (E) a une solution unique $u \in V$.

• Soit Ker $a \neq \{0\}$ et une CNS pour qu'il y ait existence de solution est que $l(v) = 0$ pour tout $v \in$ Ker a. Dans ce cas, montrer que les solutions diffèrent d'un élément arbitraire de Ker a.

Indications et remarques : Utiliser la base hilbertienne de H, notée $(w_n)_n$ composées des fonctions propres du problème

$$\forall v \in V, \quad a(w_n, v) + p(w_n, v)_H = \lambda_n (w_n, v)_H$$

(iii) Le résultat (ii) nécessite t-t-il l'hypothèse que a soit symétrique ? (on pourra étudier suivant le signe de a).

10. Calculer la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré relative à l'espace $V = \{u \in H^1(0,1),\ u(0) = 0\}$.

11. Le but de cet exercice est de déterminer la norme $H^{1/2}(0,L)$. On note Ω le carré $\Omega =]0, L[\times]0,1[$. On rappelle qu'une définition de la norme de cet espace est

$$||u||_{1/2} = \min_{v \in H^1(\Omega), v(x_1,0)=u(x_1)} ||v||_{1,\Omega}$$

où $||v||^2_{1,\Omega} = ||v||^2_{0,\Omega} + ||\nabla v||^2_{0,\Omega}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n(x_1) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\frac{n\pi}{L} x_1)$.

On note $V = \{q \in H^1(0,1);\ q(0) = 1,\ q(1) = 1\}$.

(a) Montrer que toute fonction $v \in H^1(\Omega)$ peut s'écrire $v(x_1, x_2) = \sum_{n \geq 0} a_n q_n(x_2) w_n(x_1)$ où $a_n \in \mathbb{R}$ et $q_n \in H^1(0,1)$ vérifie $q_n(0) = 1$.

(b) Montrer que l'on a

$$||u||_{1/2} = \min_{v \in V, v(x_1,0)=u(x_1)} ||v||_{1,\Omega}.$$

(c) Montrer que le problème de minimisation $\min_{v \in V, v(x_1,0)=u(x_1)} ||v||^2_{1,\Omega}$ revient à résoudre les problèmes de minimisation (P_n) suivants :

$$(P_n) \qquad \min_{q \in V} [\mu_n^2 \int_0^1 q(x_2)^2 dx_2 + \int_0^1 q'(x_2)^2 dx_2]$$

où $\mu_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + 1}$.

(d) Montrer que (P_n) a une unique solution $q_n = 1 + v_n$ où $v_n \in H^1_0(0,1)$ est définie par
$\forall w \in H^1_0(0,1)$,

$$\int_0^1 v_n'(x_2) w'(x_2) dx_2 + \mu_n^2 \int_0^1 v_n(x_2) w(x_2) dx_2 = -\mu_n^2 \int_0^1 w(x_2) dx_2$$

Calculer explicitement v_n puis q_n.

(e) En déduire le calcul explicite de $||u||^2_{1/2}$ pour une fonction $u(x_1) = \sum_n a_n w_n(x_1) \in H^{1/2}(0,L)$ en fonction des coefficients a_n.

12. Retrouver la formule donnant la vitesse dans le mouvement de translation verticale et de rotation d'un sous-marin à partir de $\theta(m) = O_0 + d_z e_z + R_\alpha(O_0 m)$.

13. Formules relatives au changement d'ouvert.

    On reprend les notations du cours. On a $m' = m + \theta(m) \in \Omega'$ pour $m \in \Omega_0$. Dans Ω_0, la frontière du sous marin est décrite via les paramètres

    $$\tau = \frac{dm}{ds} \qquad \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{R}\nu \qquad \frac{d\nu}{ds} = \frac{1}{R}\tau$$

    et $-\dfrac{1}{R} = [\tau, \dfrac{d\tau}{ds}]$.

    Dans Ω', la frontière du sous marin est décrite par

    $$\tau' = \frac{dm'}{ds'} \qquad \frac{d\tau'}{ds'} = -\frac{1}{R'}\nu' \qquad \frac{d\nu'}{ds'} = \frac{1}{R'}\tau'$$

    et $-\dfrac{1}{R'} = [\tau', \dfrac{d\tau'}{ds'}]$.

    Montrer les formules (à l'ordre 1) :

    (a) $ds' = (1 + \dfrac{d\theta_\tau}{ds} + \dfrac{\theta_\nu}{R})ds$

    (b) $\tau' = \tau + (\dfrac{d\theta_\nu}{ds} - \dfrac{\theta_\tau}{R})\nu$

    (c) $\nu' = \nu - (\dfrac{d\theta_\nu}{ds} - \dfrac{\theta_\tau}{R})\nu$

    (d) $\displaystyle\int_{\Omega'} f(m')dm' = \int_{\Omega_0} f(m)(1 + \mathrm{div}\theta)dm$

    (e) $\displaystyle\int_{\Gamma'} f(m')dm' = \int_{\Gamma_0} f(m)(1 + \frac{d\theta_\tau}{ds} + \frac{\theta_\nu}{R})dm$

14. Calculer les vecteurs τ' et ν' par l'image de $(I + \theta)$ d'une portion initialement horizontale.

15. On reprend l'étude du système fluide-sous marin dans le cas stationnaire et on conserve les notations et hypothèses du cours.

    On note Ω l'ouvert de référence occupé par le fluide et S_b^0 l'ouvert occupé par le sous-marin. La frontière de Ω a deux composantes connexes $\Gamma_e = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_f$, (frontière exterieure) et $\Gamma_b^0 = \partial S_b^0$, frontière commune avec le sous-marin dans la configuration de référence. Pour $\theta \in C^1(\overline{S_b^0 \cup \Omega_0})$, à support dans un voisinage de S_b^0, on note $\Omega_b^\theta = (I+\theta)(\Omega)$ et $S_b^\theta = (I+\theta)(S_b^0)$.

    On note D_T l'ensemble des déplacements admissibles θ qui sont des translations au voisinage du sous-marin.

    On note $V_\theta = \{\psi \in H^1(\Omega_b^\theta),\ \ \psi = 0 \ \text{ sur } \Gamma_f\}$ et ν_θ la normale extérieure au fluide à Γ_b^θ.

    L'énergie cinétique contenue dans Ω_b^θ dépend de la fonction θ et est définie par

$$E_c(\theta) = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega_b^\theta} |\nabla\varphi|^2$$

    où $\varphi = \varphi_\theta$ vérifie $\varphi + x \in V_\theta$ est solution de : $\forall \psi \in V_\theta$,

$$\int_{\Omega_b^\theta} \nabla\varphi.\nabla\psi = U\int_{\Gamma_1} (e_x, \nu)\psi$$

    Le second principe de la thermodynamique précise que, sans apport extérieur, et sous réserve que la position du sous-marin ne varie que d'une translation, l'énergie cinétique ne dépend pas de la dîte position. Le but ici est de montrer que sous cette hypothèse, la force de pression hydrodynamique qui s'exerce sur le sous-marin est nulle.

    On suppose donc que pour toute fonction $\theta \in D_T,\ \ E_c'(0).\theta = 0$.

    (a) On note $\varphi^1 = \varphi'(0).\theta$, où $\varphi'(0)$ est la différentielle de $\theta \to\ \varphi_\theta$ en 0. Montrer que φ^1 est solution de
    $\forall \psi \in V_0$,

$$\int_{\Omega_0} \nabla\varphi^1.\nabla\psi + \int_{\Omega_0} \nabla\varphi_0.\nabla\psi \ \mathrm{div}(\theta) = \int_{\Omega_0} ({}^tD\theta + D\theta)\nabla\varphi_0.\nabla\psi$$

    (b) Montrer que

$$E_c'(0).\theta = \frac{\rho}{2}\int_{\Omega_0} |\nabla\varphi_0|^2 \ \mathrm{div}(\theta) - \rho\int_{\Omega_0} (D\theta\nabla\varphi_0, \nabla\varphi_0) + \rho\int_{\Omega_0} \nabla\varphi_0.\nabla\varphi^1$$

    (c) En déduire que $E_c'(0).\theta = 0$ équivaut à

$$\forall \theta \in D_T, \quad \int_{\Gamma_b^0} (\theta.\nu)|\nabla\varphi_0|^2 = 0$$

    (d) Montrer que la force de pression hydrodynamique F_h s'écrit

$$F_h = -\frac{\rho}{2}\int_{\Gamma_b^0} |\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}|^2\nu.$$

    En déduire que $F_h = 0$.

16. Soit $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Soit Ω le secteur du plan défini en coordonnées polaires usuelles par

$$\Omega = \{m = (r\cos(\xi), r\sin(\xi)); 0 < r < R, \quad 0 < \xi < \omega\}.$$

La fontière de Ω est partagée en

$$\Gamma_0 = \{m(R,\xi);\ 0 < \xi < \omega\} \ \ \Gamma_1 = \{m(r,0), m(r,\omega);\ 0 \leq r \leq R\}$$

Soit $u_d \in H^{1/2}(\Gamma_0)$. On s'intéresse à la régularité de la solution $u \in H^1(\Omega)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \ \Omega \\ u = u_d \text{ sur } \ \Gamma_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \ \Gamma_1 \end{cases}$$

(a) Montrer que les fonctions $w_n(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\cos(\dfrac{n\pi}{\omega})$, pour $n \geq 0$, forment une base hilbertienne de $L^2(0,\omega)$.

(b) En décomposant u_d dans cette base, en utilisant l'exercice 11 et la méthode vue en cours pour l'étude de la régularité au fond de fissure, montrer que la solution u s'écrit

$$u(r,\xi) = \sum_{n\geq 0} u_n r^{n\frac{\pi}{\omega}} w_n(\xi).$$

(c) On suppose u_d régulière. Montrer que $u \in H^2(\Omega)$ si et seulement si $0 \leq \omega < \pi$.

17. Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ. On note $a(u,v)$ une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \ a(u,v) = \int_\Omega fv$$

où $f \in L^2(\Omega)$ vérifie $f \leq 0$.
On note $u^+ = \sup(u,0)$ et on admettra que $u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $u^+ = 0$.
En déduire que $\eta_0 \leq 0$ (notation du cours).

18. On pose $\Omega =]0,L_1[\times]0,L_2[\times]-H,0[$ (parallélépipède rectangle). La surface libre est $\Gamma_f =]0,L_1[\times]0,L_2[$. On considère le problème : trouver $(w,\lambda) \in H_0^1(\Gamma_f)\times\mathbb{R}^+$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \ \sigma\int_{\Gamma_f}\nabla_s w.\nabla_s v + \rho g\int_{\Gamma_f} wv = \lambda\rho\int_{\Gamma_f} G(\frac{\partial w}{\partial x_1})\frac{\partial v}{\partial x_1}. \qquad (1)$$

où $G(\dfrac{\partial w}{\partial x_1})$ est la trace sur Γ_f de la solution Φ de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega \nabla\Phi.\nabla\psi = \int_{\Gamma_f}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\psi. \qquad (2)$$

(a) Montrer que (2) admet une solution définie à une constante près. Pourquoi cette constante n'intervient-elle pas dans (1) ?

(b) Pourquoi peut on chercher les solutions de (1) sous la forme

$$w(x_1, x_2) = \sum_{n,m\geq 1} A_{nm} \sin(\frac{n\pi x_1}{L_1}) \sin(\frac{m\pi x_2}{L_2}),$$

où $A_{nm} \in \mathbb{R}$.

(c) Justifier que G peut s'écrire sous la forme

$$G(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n,m\geq 1} B_{nm} \cos(\frac{n\pi x_1}{L_1}) \sin(\frac{m\pi x_2}{L_2}) \cosh(K_{nm}(x_3 + H)),$$

avec $K_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2}}$.

(d) Donner les solutions de (1). En supposant que H est grand, donner l'expression de la plus petite valeur propre λ_1.

(e) On suppose maintenant que $\sigma = 0$. Que deviennent les solutions de (1) ? Que se passe-t-il à votre avis ?

19. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ. Soit $T > 0$. On note $Q = \Omega\times]0, T[$. Pour $U \in \mathbb{R}$, on note u la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u} - \Delta u - U^2 u = 0 \ \text{ dans } Q \\ u = 0 \ \text{ sur } \Gamma\times]0, T[\\ u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \ \dot{u}(0) = u_1 \in L^2(\Omega) \end{array} \right. \tag{3}$$

(a) Justifier l'existence d'une suite $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{R}^+$, d'une base hilbertienne $(w_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(\Omega)$, formée d'éléments orthogonaux de $H_0^1(\Omega)$ solutions de

$$-\Delta w_n = \lambda_n w_n.$$

(b) On cherche la solution de (3) sous la forme

$$u(x, t) = \sum_n \alpha_n(t) w_n(x).$$

(c) Montrer que α_n est solution de

$$\ddot{\alpha}_n + (\lambda_n - U^2)\alpha_n = 0$$

avec comme données initiales $\alpha_n(0) = \int_\Omega w_n u_0$ et $\dot{\alpha}_n(0) = \int_\Omega w_n u_1$.

En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall t \in [0, T], \ \ \forall n, \ \ t.q. \ \ U < \sqrt{\lambda_n}, \quad |\alpha_n(t)| \leq c$$

et que

$$\forall t \in [0, T], \ \ \forall n, \ \ t.q. \ \ U > \sqrt{\lambda_n}, \qquad |\alpha_n(t)| \leq \exp(\sqrt{(U^2 - \lambda_n)}T)$$

Que se passe-t-il si $U = \lambda_n$?

(d) On pose $u_\xi = e^{-\xi t} u$ où U est fixée. Montrer qu'il existe $\xi \geq 0$ telle que u_ξ soit bornée dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$.

(e) Comment adapter ces résultats au cas des vagues progressives stationnaires (attention piège !).