PROLONGEMENT UNIQUE DES SOLUTIONS DE L'EQUATION DE STOKES

Caroline Fabre

Université Paris 12-Val de Marne,
U.F.R. Sciences,
Département de Mathématiques,
Av. du Général de Gaulle,
94010 Creteil Cedex et
Centre de Mathématiques Appliquées,
Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France.

et

Gilles Lebeau

Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques,
Bat. 425,
91405 Orsay Cedex, France.

- Juillet 1995 -

Résumé - Nous démontrons un résultat de prolongement unique des solutions d' équations de Stokes avec un potentiel peu régulier. Pour cela, nous établissons une variante de l'inégalité de Carleman concernant le Laplacien.

Abstract - We prove a unique continuation property for solutions of Stokes equations with a non regular potential. For this, we state a Carleman' s inequality which concerns the Laplace operator.

Mots clés - Equations de Stokes, Prolongement unique.

Classification AMS - 35 B 60, 35 R 05, 35 S 99.

1 Introduction

Le but de cet article est d' établir un résultat de continuation unique pour les solutions de l'équation de Stokes lorsque le potentiel n' est pas régulier. Le problème précis se pose ainsi : soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ et soit $T > 0$. On pose $Q = \Omega \times]-T, T[$ et on considère un ouvert O de Q. On rappelle que la composante horizontale de O est

$$C(O) = \{(x,t) \in Q, \ \ \exists x_0 \in \Omega, \ \ (x_0, t) \in O\}.$$

Soit $a = (a_1(x,t), \cdots, a_n(x,t)) \in (L^\infty_{loc}(Q))^n$. Si $u = (u_1(x,t), \cdots, u_n(x,t))$ est une fonction vectorielle et si $p = p(x,t)$ est une fonction scalaire, on dira que (u,p) vérifie l' équation de Stokes dans Q si l' on a

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} u' - \Delta u + (a.\nabla)u + \nabla p = 0 \quad \text{dans} \quad Q \\ \text{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad Q \end{cases}$$

où ' désigne la dérivation par rapport à t. Le système [?] se compose en fait de $n+1$ équations où le vecteur $(a.\nabla)u$ a pour k^{ieme} composante $\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$.
Le problème de continuation unique auquel nous nous intéressons est le suivant : si (u,p) est solution de [?] et si $u = 0$ dans O, a-t-on $u = 0$ dans $C(O)$?

Nous démontrons les résultats suivants :

Théorème 1.1
Si Ω est connexe, si $a \in L^\infty_{loc}(Q)^n$ et si $(u,p) \in L^2(-T,T; H^1_{loc}(\Omega))^n \times L^2_{loc}(Q)$ est une solution de [?] vérifiant $u = 0$ dans O alors $u = 0$ dans $C(O)$.

Le résultat est connu pour des potentiels $a \in W^{1,\infty}(Q)^n$ et a été démontré par J.C. Saut et R. Temam (voir [?]) lorsque a est C^1 puis généralisé par E. Fernandez-Cara et J. Real (voir [?]). Leur méthode consiste à appliquer deux fois l'inégalité de Carleman sur le Laplacien : une fois sur $u' - \Delta u$ et une fois sur $\Delta p = -\text{div}((a.\nabla)u)$. La difficulté du problème est que si a n'est que L^∞, l 'inégalité de Carleman "classique" portant sur p ne donne pas une majoration locale des normes L^2 de p (et éventuellement de son gradient) en fonction des normes L^∞ de a et H^1 de u. C'est pour cette raison que l'on étudie dans un premier temps une équation du type $\Delta y = L_1 f$, où L_1 est un opérateur différentiel d'ordre 1, en vue d' établir une variante de l' inégalité de Carleman permettant de majorer la norme H^1 de y par la norme L^2 de f. La méthode utilisée s'inspire du travail de G. Lebeau et L. Robbiano (voir [?]).

Nous déduirons aisément du théorème 1.1 le

Corollaire 1.1

Si Ω est connexe, si $a \in L^\infty(Q)^n$ et si $(u,p) \in L^2(-T,T;H^2(\Omega))^n \times L^2(-T,T;H^1(\Omega))$ est une solution de [?] vérifiant $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ et p constante sur γ où γ est un ouvert de $\partial\Omega \times]-T,T[$, alors $u = 0$ dans la composante horizontale de γ et p y est constante.

Remarque 1.1

(i) On peut se demander si le résultat d' unicité reste vrai si l' on suppose seulement $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sur γ. La réponse est négative même dans le cas stationnaire avec un potentiel nul. Par exemple, si l' on prend $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, avec $x = (x_n, x')$, où $x_n > 0$ et $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. On considère une pression non constante $p(x_n, x') = p_0(x')$ vérifiant $\Delta' p_0 = 0$, où Δ' désigne le laplacien uniquement par rapport à la variable x'. Soit $u = (u_1, \cdots, u_{n-1}, 0)$ avec pour $1 \leq j \leq n-1$,

$$u_j(x_n, x') = \frac{x_n^2}{2} \frac{\partial p_0}{\partial x_j}.$$

On a alors $u(0,x') = \frac{\partial u}{\partial x_n}(0,x') = 0$ et (u,p) est une solution non nulle de [?].

(ii) Les méthodes du Théorème 1.1 seront adaptées (dans [8]) pour démontrer des propriétés similaires pour les équations de Navier Stokes linéarisées.

Dans la suite de l'introduction, nous décrivons notre démarche : dans une seconde section, nous rappelons quelques résultats de calculs h-pseudo-différentiels. Nous présentons ensuite, dans une troisième section, l' étude du cas stationnaire. Bien sûr, ce cas est contenu dans le cas d'évolution mais nous avons choisi de le présenter à part car, étant techniquement plus simple et contenant les mêmes idées que le cas général, il est beaucoup plus clair. De plus, l' inégalité de Carleman que nous établissons pour les solutions y d'équations du type $\Delta y - L_1 f \in L^2$ n' a aucun lien avec le caractère d' évolution du problème. Dans ce cas, il s' agit de montrer la

Proposition 1.1

Soit Ω un ouvert connexe et soit ω un ouvert contenu dans Ω. Si $a \in L^\infty_{loc}(\Omega)^n$ et si $(u,p) \in H^1_{loc}(\Omega)^n \times L^2_{loc}(\Omega)$ est une solution de

$$\begin{cases} \Delta u + (a.\nabla)u + \nabla p = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \text{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

vérifiant $u = 0$ dans ω alors $u = 0$ dans Ω et p est constante dans Ω.

Les étapes essentielles seront les suivantes : (on note $B(0,r)$ la boule ouverte de rayon r centrée à l'origine)

Il existe $M > 0$ tel que

$$1)\left\{\begin{array}{l}\Omega = B(0,2)\\ (u,p) \in H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega) \ \text{ solution de [?] dans } \Omega\\ a \in L^\infty(\Omega), \ \ |a|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\\ u = 0 \ \text{ dans } \ B(0,1)\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad u = 0 \ \text{ dans } \ B(0,2).$$

$$2)\left\{\begin{array}{l}\Omega \ \ \text{ouvert connexe contenant } 0\\ (u,p) \in H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega) \ \ \text{ solution de [?] dans } \Omega\\ a \in L^\infty_{loc}(\Omega),\\ u = 0 \ \ \text{dans} \ \ B(0,r), \ \ r \text{ assez petit}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \ u = 0 \text{ dans } B(0,2r),$$

puis nous verrons comment propager à tout l'ouvert Ω. Le passage de la première étape à la deuxième utilise un argument classique d'homogeneité que nous expliciterons.

Enfin, dans une dernière section, nous démontrons le théorème 1.1 et son corollaire. Comme pour le cas stationnaire, nous établirons dans un premier temps le résultat pour des potentiels de norme L^∞ assez petite puis nous concluerons par un changement d' échelle.

Les auteurs remercient J.P. Puel sans lequel ils n'auraient pu écrire cet article. Caroline Fabre remercie L. Robbiano qui, le premier, lui a expliqué les inégalités de Carleman et qui a toujours répondu à ses questions avec patience.

2 Quelques résultats sur le calcul pseudo-différentiel

Les résultats de ce paragraphe de rappel sont très classiques. Nous renvoyons le lecteur aux livres de D. Robert et X. St Raymond pour une introduction détaillée aux calculs pseudo et h- pseudodifférentiels. On note $D_j = \frac{h}{i}\partial_j$, $\lambda(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$. On notera S^m l'espace des symboles définis sur $\mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \exists C_{\alpha,\beta} \ \ \forall x, \xi, h \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,h)| \leq C_{\alpha,\beta} \lambda(\xi)^{m-|\beta|}$$

et qui vérifient :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \exists a_j(x,\xi) \in S^{m-j}, \quad a(x,\xi,h) \in \sum_{j=0}^{N} h^j a_j(x,\xi) + h^{N+1} S^{m-N-1}$$

Le symbole principal de a est alors a_0. Si $a \in S^m$ et si u est $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit l' opérateur pseudo-différentiel d'ordre m

$$a(x,D,h)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int e^{ix\cdot\frac{\xi}{h}} a(x,\xi,h)\hat{u}(\frac{\xi}{h})d\xi$$

(où $\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix.\xi}u(x)dx$ est la transformée de Fourier de u). Si $a \in S^m$, $a(x,D,h)$ envoie $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. On note E^m l'espace des opérateurs pseudo-differentiels d'ordre m et $E^{-\infty} = \cap_m E^m$.

On note $|v|_0^2 = \int_{R^n} |v(x)|^2 dx$ et $|v|_1^2 = |\lambda(D)v|_0^2$ donc

$$|v|_1^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} \lambda^2(h\xi)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int |v|^2 dx + h^2 \int |\nabla v|^2 dx.$$

Nous rappelons que si $a \in E^m$ et $b \in E^l$ alors $a(x,D) \circ b(x,D) \in E^{m+l}$ et a pour symbole principal $a_0 b_0$.
D'autre part $\frac{i}{h}[a(x,D), b(x,D)] = \frac{i}{h}(a(x,D)\circ b(x,D) - b(x,D)\circ a(x,D)) \in E^{m+l-1}$ et a pour symbole principal $\{a_0, b_0\} = \partial_\xi a_0 \partial_x b_0 - \partial_x a_0 \partial_\xi b_0$.

Nous rappelons l'inégalité de Garding suivante :

Proposition 2.1
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in E^2$ vérifie :

$$\exists c_1 > 0, \quad \forall (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n, \quad Re a_0(x,\xi) \geq c_1 \lambda(\xi)^2$$

alors pour tout K compact de U, il existe $h_K > 0$,

$$\forall u \in H_0^1(K) \quad \forall h \in]0, h_K] \qquad Re(a(x,D,h)u,u) \geq \frac{c_1}{4}|u|_1^2.$$

La proposition suivante concerne l'inversion sur les hautes fréquences des opérateurs d'ordre 2 elliptiques pour $|\xi|$ grand.

Proposition 2.2
Si $p \in E^2$ vérifie

$$\exists c > 0, \quad |p_0(x,\xi)| \geq c\lambda(\xi)^2 \quad \forall \xi, \ |\xi| \geq R, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

alors il existe $e \in E^{-2}$ et $\alpha \in E^{-\infty}$ telles que $e \circ p = 1 + \alpha + hR$, où $R \in E^{-1}$, et $\alpha(x,\xi) = 0$ si $\xi \geq R$.

L' inégalité de Garding et la proposition 2.2 sont suffisantes pour traiter le cas stationnaire. Pour le cas d' évolution, les opérateurs pseudodifférentiels dépendent d' un paramètre (le temps). Si $I = [-T_0, T_0]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ on dira que la famille d' opérateurs de symbole $a(t,x,\xi,h)$, tous d' ordre m, est dans $L^\infty(I, E^m)$ si les constantes $C_{\alpha,\beta}$ intervenant dans la définition de S^m ne dépendent pas de $t \in I$. On rappelle (voir [?]) que si $(a(t))_{t\in I} \in L^\infty(I,E^m)$ et si $(b(t))_{t\in I} \in L^\infty(I, E^l)$ alors $(a(t) \circ b(t))_t \in L^\infty(I, E^{m+l})$ et que l'on a

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \exists C_s > 0, \quad \forall t \in I, \ \ \forall u \in H^s, \ \ |a(t)u|_{s-m} \leq C_s |u|_s,$$

où les constantes C_s ne dépendent que d' un nombre fini de constantes $C_{\alpha,\beta}$.
De même, on a l' inégalité de Garding suivante : si U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $(a(t))_{t\in I} \in L^\infty(I, E^2)$ vérifie

$$\exists c_1 > 0, \quad \forall t \in I, \quad \forall (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n, \quad Rea_0(t,x,\xi) \geq c_1 \lambda(\xi)^2$$

alors pour tout K compact de U, il existe $h_K > 0$,

$$\forall u \in H_0^1(K) \ \ \forall (t,h) \in I \times]0, h_K] \qquad Re(a(t,x,D,h)u,u) \geq \frac{c_1}{4}|u|_1^2.$$

Enfin, on a l' analogue de la proposition 2.2 :
Si $(p(t)) \in L^\infty(I, E^2)$ vérifie

$$\exists c > 0, \quad |p_0(x,\xi)| \geq c\lambda(\xi)^2 \qquad \forall \xi, \ \ |\xi| \geq R, \ \ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

alors il existe $(e(t)) \in L^\infty(I, E^{-2})$ et $\alpha(t) \in L^\infty(I, E^{-\infty})$ telles que $e(t) \circ p(t) = 1 + \alpha(t) + hR(t)$, où $R(t) \in L^\infty(I, E^{-1})$, et $\alpha(t,x,\xi) = 0$ si $\xi \geq R$.

3 Cas stationnaire

Nous démontrons dans cette section la proposition 1.1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit p l'opérateur

$$p = -h^2 e^{\frac{\varphi}{h}} \circ \Delta \circ e^{-\frac{\varphi}{h}}.$$

On a

$$p(z) = -h^2 \Delta z + 2h \nabla\varphi.\nabla z - |\nabla\varphi|^2 z + h\Delta\varphi z$$

donc $p \in E^2$ et son symbole principal est

$$p_0(x,\xi) = \sum_j (\xi_j + i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j})^2. \tag{3.1}$$

3. 1 Inégalité de Carleman

Pour plus de clarté, nous rappelons l'inégalité de Carleman "classique" sur le laplacien (voir [?]):

Proposition 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact contenu dans U. Si $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur U et si

$$(3.2)\quad \exists c_1 > 0, \quad p_0(x,\xi) = 0 \ \text{ et } \ (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \{Rep_0, Imp_0\}(x,\xi) \geq c_1,$$

alors il existe $c > 0$ et $h_1 > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_1$ et toute fonction $y \in H_0^2(K)$ on a

$$(3.3)\qquad \int_K |y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx \leq ch^3 \int_K |\Delta y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx.$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, et pour $f = (f_1, \cdots, f_s)$, on note L_1 l'opérateur d'ordre 1 suivant :

$$(3.4)\qquad L_1(f) = \sum_{(j,k)\in\{1,\cdots s\}\times\{1,\cdots,n\}} a_{jk} \frac{\partial f_j}{\partial x_k},$$

où les fonctions a_{jk} sont $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
On s'intéresse à l'opérateur $\Delta y - L_1 f$ et l'inégalité que nous démontrons est la suivante :

Théorème 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit K un compact de U. Si $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur U et si

$$(3.5)\quad \exists c_1 > 0, \quad (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n \ \text{ et } \ p_0(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{Rep_0, Imp_0\}(x,\xi) \geq c_1,$$

alors il existe $c > 0$ et $h_1 > 0$ tels que pour tout couple $(y,f) \in H_0^1(U) \times L^2(U)^s$ vérifiant $\Delta y - L_1 f \in L^2(U)$ et $supp(y) \cup supp(f) \cup supp(\Delta y - L_1 f) \subset K$, et tout $h \in]0, h_1[$, on a

(3.6)

$$\int_K |y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx \leq hc \int_K |f|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx + ch^3 \int_K |\Delta y - L_1 f|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx.$$

Remarque 3.1

Par rapport à l'inégalité de Carleman "classique", on perd en puissance de h^{-1} mais on gagne en norme de f. Bien sur, pour $f = 0$, on retrouve l'inégalité usuelle.

Démonstration du Théorème 3.1

Toutes les fonctions de L^2 à support dans K seront systematiquement prolongées par 0 dans U. Dans toute la suite, on pose $F = \Delta y - L_1 f$, $c_0 = |\nabla\varphi|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

En posant $z = y\exp(\dfrac{\varphi}{h})$, $g_j = f_j\exp(\dfrac{\varphi}{h})$ (où $f = (f_1, \cdots, f_s)$) et $G = F\exp(\dfrac{\varphi}{h})$, l' équation $\Delta y = L_1 f + F$ est équivalente à

$$pz = -h^2 L_1(g) + h\sum_{j,k} a_{j,k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} g_j - h^2 G$$

donc

$$pz = hL(D)(g) + hL_0(g) - h^2 G \tag{3.7}$$

où $L_0(g) = \sum_{j,k} a_{j,k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} g_j$ est dans E^0, $L(D)g = -i\sum_{j,k} a_{j,k} D_{x_k} g_j$ est dans E^1, et $(g, G) \in L^2(U)^{s+1}$.

L'idée est d'obtenir des estimations sur z séparement sur les hautes et les basses fréquences. Soit

$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \exists x \in \mathbb{R}^n, \text{ tel que } \; p_0(x,\xi) = 0.\}$$

On a $V \in \bar{B}(0, c_0)$. Soit donc $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction telle que $0 \le \chi \le 1$ et $\chi = 1$ au voisinage de $\bar{B}(0, 2c_0^2 + 2)$.

La fonction $\delta = 1 - \chi$ est dans S^0 et on a $\delta(D) \circ p = p \circ \delta(D) + [\delta(D), p]$ avec $[\delta(D), p] \in hE^{-\infty}$.

Il existe donc $R_0 \in E^0$ tel que

$$p \circ \delta(D)z = h\delta(D) \circ L(g) + h\delta(D) \circ L_0(g) - h^2\delta(D)G + hR_0 z. \tag{3.8}$$

En inversant p, on va ainsi obtenir une estimation de z sur les hautes fréquences. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \forall\xi, \; |\xi|^2 \ge 2c_0^2 + 1, \quad Re(2p_0(x,\xi)) \ge \lambda^2(\xi) \;. \tag{3.9}$$

Utilisant la proposition 2.2, il existe $e \in E^{-2}$, tel que $e \circ p = 1 + \alpha + hR_{-1}$ où $R_{-1} \in E^{-1}$. De plus, $\alpha = 0$ sur le support de δ donc $\alpha \circ \delta(D) \in hE^{-\infty}$.

Il existe $R' \in E^{-1}$ tel que
(3.10)
$\delta(D)z = h(e\circ\delta(D)\circ L)(g) + h(e\circ\delta(D)\circ L_0)(g) - h^2 e\circ\delta(D)G + h(e\circ R_0)z - hR'z.$

Les opérateurs $e\circ\delta(D)\circ L$, $e\circ\delta(D)\circ L_0$ et $e\circ\delta(D)$ sont respectivement dans E^{-1}, E^{-2} et E^{-2}. Il existe donc $c_2 > 0$ telle que

$$|\delta(D)z|_1^2 \leq c_2\big(h^2|g|_0^2 + h^4|G|_0^2 + h^2|z|_0^2\big) \tag{3.11}$$

Il reste à évaluer $|\chi(D)z|_1$. Comme χ est à support compact en ξ, $\chi(D) \in E^{-\infty}$ et $\chi(D)\circ p \in p\circ\chi(D) + hE^{-\infty}$.
Il existe donc $R_{-\infty} \in E^{-\infty}$, tel que

$$p\circ\chi(D)z = h(\chi(D)\circ L)(g) + h(\chi(D)\circ L_0)(g) - h^2\chi(D)G + hR_{-\infty}(z). \tag{3.12}$$

Soit $\beta \in C_0^\infty(U)$ telle que $\beta = 1$ sur K. On a $\chi(D)z = \beta(x)\chi(D)z + [\chi(D),\beta]z$ avec $[\chi(D),\beta] \in hE^{-\infty}$ et $v = \beta\chi(D)z \in C_0^\infty(U)$. On écrit alors $p = a + ib$ où a et b sont autoadjoints. On a $a = \frac{p+p^*}{2} \in E^2$ et son symbole principal est $a_0(x,\xi) = |\xi|^2 - |\nabla\varphi(x)|^2 = Rep_0(x,\xi)$. De même, $b = \frac{p-p^*}{2i} \in E^1$, son symbole principal est $b_0(x,\xi) = 2\xi.\nabla\varphi(x) = Imp_0(x,\xi)$.
On a

$$\begin{aligned} |p(v)|_0^2 = |a(x,D)(v)|_0^2 + |b(x,D)(v)|_0^2 \\ + i\big((a\circ b - b\circ a)v, v\big). \end{aligned} \tag{3.13}$$

De plus, $a\circ b - b\circ a = [a,b] \in E^2$ et son symbole principal est $\frac{h}{i}\{a_0, b_0\}$.
D'autre part, d'après [?], il existe $c_3 > 0$ et $d' > 0$ (assez grande) telle que pour $x \in U$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$d'\lambda^{-2}(\xi)(a_0)^2(x,\xi) + d'(b_0)^2(x,\xi) + \{a_0,b_0\}(x,\xi) \geq c_3\lambda^2(\xi). \tag{3.14}$$

Utilisant l'inégalité de Garding sur U avec comme compact le support de β, et comme opérateur $d'a\circ\lambda^{-2}\circ a + d'b\circ b + \frac{i}{h}[a,b](x,D)$, on en déduit que

$$i([a,b]v,v) \geq \frac{c_3}{4}h|v|_1^2 - d'h|\lambda^{-1}\circ av|_0^2 - d'h|bv|_0^2. \tag{3.15}$$

Utilisant [?], [?] et $|\lambda^{-1}a(v)|_0^2 \leq |a(v)|_0^2$, on obtient pour h assez petit

$$(3.16) \qquad |p(v)|_0^2 \geq h\frac{c_3}{4}|v|_1^2.$$

En utilisant [?], le fait que $v = \beta\chi(D)z$ et

$$\begin{cases} |\beta\chi(D)z|_1^2 \geq \dfrac{1}{2}|\chi(D)z|_1^2 - |[\chi(D),\beta]z|_1^2 \geq \dfrac{1}{2}|\chi(D)z|_1^2 - h^2c'|z|_0^2 \\ |p(\chi(D)z)|_0^2 \geq \dfrac{1}{2}|p(\beta\chi(D)z)|_0^2 - h^2c'|z|_0^2, \end{cases}$$

on obtient pour h assez petit :

$$(3.17) \qquad |p(\chi(D)z)|_0^2 \geq h\frac{c_3}{16}|\chi(D)z|_1^2 - h^2c"|z|_0^2.$$

D' autre part,

$$(3.18) \qquad \begin{aligned} |p(\chi(D)z)|_0^2 \leq 4h^2|(\chi(D)\circ L)(g)|_0^2 + 4h^2|\chi(D)\circ L_0(g)|_0^2 + 4h^4|\chi(D)G|_0^2 \\ + 4h^2|R_{-\infty}z|_0^2. \end{aligned}$$

On a $\chi(D) \in E^{-\infty}$, $\chi(D)\circ L$ et $\chi(D)\circ L_0$ sont dans E^0.
Il existe donc $c_5 > 0$ telle que pour h assez petit, [?] et [?] entrainent

$$(3.19) \qquad |\chi(D)z|_1^2 \leq c_5[h|g|_0^2 + h^3|G|_0^2] + hc_5|z|_0^2.$$

On obtient en combinant maintenant [?] et [?], pour h petit :

$$(3.20) \qquad \begin{aligned} |z|_1^2 &\leq 2(|\chi(D)z|_1^2 + |\delta(D)z|_1^2) \\ &\leq 2c_5[h|g|_0^2 + h^3|G|_0^2] + 2hc_5|z|_0^2 + 2c_2h^2\left(|g|_0^2 + h^2|G|_0^2 + |z|_0^2\right) \\ &\leq c[h|g|_0^2 + h^3|G|_0^2] + h|z|_0^2. \end{aligned}$$

On en déduit que pour h assez petit

$$|z|_1^2 \leq c[h|g|_0^2 + h^3|G|_0^2],$$

d'où découle facilement le théorème en écrivant que $y = z\exp(-\frac{\varphi}{h})$ donc $\int |y|^2e^{2\frac{\varphi}{h}} + h^2\int |\nabla y|^2e^{2\frac{\varphi}{h}} \leq c|z|_1^2$. □

3. 2 Démonstration de la proposition 1.1

Cette inégalité de Carleman permet de montrer la proposition 1.1 pour des potentiels de norme assez petite :

Lemme 3.1

Il existe $M > 0$, tel que pour tout $a \in L^\infty(B(0,2))$ vérifiant $|a|_{L^\infty(B(0,2))} \leq M$, et tout couple $(u,p) \in H^1(B(0,2))^n \times L^2(B(0,2))$ solutions de [?] dans $B(0,2)$, on a

$$u = 0 \quad \text{dans} \quad B(0,1) \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{dans} \quad B(0,2). \tag{3.21}$$

Démonstration du Lemme 3.1

On commence par donner la construction des fonctions φ. On prend pour $\varepsilon > 0$,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{3}{4} \leq |x| \leq 2 - \varepsilon\} \tag{3.22}$$

et

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{2} < |x| < 2\}. \tag{3.23}$$

Les symboles que l'on considère sont

$$a_0(x,\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 - (\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x))^2$$

et

$$b_0(x,\xi) = 2\sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

Le crochet de Poisson de a_0 et b_0 est

$$\begin{aligned} \{a_0, b_0\}(x,\xi) &= \partial_\xi a_0 \partial_x b_0 - \partial_x a_0 \partial_\xi b_0 \\ &= 4\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x)\,[\xi_k \xi_j + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

On cherche φ sous la forme $\varphi(x) = \exp(-\delta|x|^2)$ où $\delta > 0$.

On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -2x_j\delta\varphi(x)$$

et

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k}(x) = -2\delta\varphi(x)\delta_{jk} + 4\delta^2 x_j x_k \varphi(x).$$

D'autre part, $a_0(x,\xi) = b_0(x,\xi) = 0$ est équivalent à $|\xi|^2 = |\nabla\varphi(x)|^2$ et $\xi.\nabla\varphi(x) = 0$. Sous ces conditions, le crochet de Poisson de a_0 et b_0 devient

$$\{a_0, b_0\}(x,\xi) = 64\delta^3|x|^2\varphi(x)^3\left[\delta|x|^2 - 1\right] \tag{3.25}$$

On vérifie facilement que si $\delta > 4$ la condition [?] est réalisée.

Soit $\zeta \in C_0^\infty(\overset{\circ}{K})$ telle que $\zeta = 1$ sur $[1-\varepsilon \leq |x| \leq 2-2\varepsilon]$. On note $v = \zeta u$ et $q = \zeta p$. Comme $u = 0$ dans $B(0,1)$ on a $\nabla p = 0$ dans $B(0,1)$ donc p est constante sur $B(0,1)$ et on peut supposer $p = 0$ dans $B(0,1)$. De plus, $v \in H_0^1(K)^n$ et $q \in L^2(K)$. On va voir qu'en fait $v \in H_0^2(K)$ et $q \in H_0^1(K)$.
On a

$$\Delta v = \Delta\zeta u + 2\nabla\zeta.\nabla u + \zeta[-\nabla p - (a.\nabla)u]$$

donc

$$\Delta v + \nabla q + (a.\nabla)v = \Delta\zeta u + 2\nabla\zeta.\nabla u + \nabla\zeta p + (a.\nabla\zeta)u.$$

D' autre part, on a

$$\Delta p = -\text{div}[(a.\nabla)u].$$

et

$$\Delta q = \zeta\Delta p + 2\nabla\zeta.\nabla p + \Delta\zeta p = -\Delta\zeta p + 2\text{div}(\nabla\zeta p) - \zeta\text{div}[(a.\nabla)u]. \tag{3.26}$$

On a

$$\text{div}[(a.\nabla)v] = \text{div}[(a.\nabla\zeta)u] + \zeta\text{div}[(a.\nabla)u] + \nabla\zeta.((a.\nabla)u). \tag{3.27}$$

Combinant [?] et [?], on obtient

$$\Delta q = \text{div}[2\nabla\zeta p - (a.\nabla)v + (a.\nabla\zeta)u] - \Delta\zeta p + \nabla\zeta.(a.\nabla)u. \tag{3.28}$$

On en déduit que $\Delta q \in H^{-1}(K)$ et $q = 0$ sur ∂K donc $q \in H_0^1(K)$. Mais alors $\Delta v \in L^2(K)$ et $v \in H_0^1(K)$ donc $v \in H^2(K)$ et par suite $v \in H_0^2(K)$. D'après le théorème 3.1 appliqué à $y = v_k$, $f = q$ et $L_1 = -\partial/\partial_{x_k}$, on a pour $h < h_1$ et $C > 0$:

$$\int_K |v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \leq Ch \int_K |q|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + Ch^3 \int_K |(a.\nabla)v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx$$
$$+ Ch^3 \int_K |\Delta\zeta u + 2\nabla\zeta.\nabla u + \nabla\zeta p + (a.\nabla\zeta)u|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx. \tag{3.29}$$

On utilise maintenant le théorème 3.1 avec $y = q$, $s = n$, $f = 2p\nabla\zeta - (a.\nabla)v + (a.\nabla\zeta)u$ et $L_1 = div$. On a $f \in L^2(U)$ et son support est dans K donc pour h assez petit,

$$\begin{aligned} C \int_K |q|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + Ch^2 \int_K |\nabla q|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx &\leq C'h|a|^2_{L^\infty(B(0,2))} \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &+ C'h \int_K |\nabla\zeta p|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + C'h \int_K |(a.\nabla\zeta)u|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &+ C'h^3 \int_K |-\Delta\zeta p + \nabla\zeta.((a.\nabla)u)|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

En sommant [?] et h [?], on obtient pour h assez petit,

$$\begin{aligned} \int_K |v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx &\leq C'|a|^2_{L^\infty(B(0,2))} h^2 \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &+ Ch^3 \int_K |(a.\nabla)v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + C'h^2 \int_K |(a.\nabla\zeta)u|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &+ C'h^2 \int_K |\nabla\zeta p|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + Ch^3 \int_K |\Delta\zeta u + 2\nabla\zeta.\nabla u + \nabla\zeta p + (a.\nabla\zeta)u|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &+ C'h^4 \int_K |-\Delta\zeta p + \nabla\zeta.((a.\nabla)u)|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx. \end{aligned} \tag{3.31}$$

On a donc pour $|a|^2_{L^\infty(B(0,2))}(C + C') < 1/2$ et h petit

$$\int_K |v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \leq \int_K F^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx, \tag{3.32}$$

où $F \in L^2$ est à support dans le support de $\nabla\zeta$ et ne dépend pas de h. Comme $\zeta = 1$ sur $[1 - \varepsilon \leq |x| \leq 2 - 2\varepsilon]$ et que u et p sont nulles dans $[|x| < 1]$, tous les termes intervenant dans F sont à support dans $[2-2\varepsilon \leq |x| \leq 2]$. D'autre part, φ est décroissante positive, donc on a

$$\int_K |F|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \leq e^{\frac{2\varphi(2-2\varepsilon)}{h}} \int_K |F|^2 dx. \tag{3.33}$$

De plus,
(3.34)
$$\begin{aligned}\int_K |v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx &\geq \int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &\quad + h^2 \int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |\nabla v|^2 e^{\frac{2\varphi}{h}} dx \\ &\geq e^{\frac{2\varphi(2-3\varepsilon)}{h}} \Big(\int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |v|^2 dx \\ &\quad + h^2 \int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |\nabla v|^2 dx \Big).\end{aligned}$$

On combine maintenant [?],[?] et [?], et on obtient :

(3.35)
$$\int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |v|^2 dx + h^2 \int_{[1\leq|x|\leq 2-3\varepsilon]} |\nabla v|^2 dx \leq 2e^{\frac{2(\varphi(2-2\varepsilon)-\varphi(2-3\varepsilon))}{h}} \int_U |F|^2 dx.$$

Comme $\varphi(2-2\varepsilon)-\varphi(2-3\varepsilon) < 0$, en passant à la limite quand $h \to 0$, on obtient que $v = 0$ dans $[1 \leq |x| \leq 2-3\varepsilon]$. Comme $v = \zeta u$ et que $\zeta = 1$ sur $[1 \leq |x| \leq 2-3\varepsilon]$, on a donc $u = 0$ dans $B(0, 2-3\varepsilon)$ et p est constante dans $B(0, 2-3\varepsilon)$, ceci quelque soit $\varepsilon > 0$ d'où le lemme. □

Lemme 3.2

Soit Ω un ouvert connexe contenant 0 et soit $a \in L^\infty_{loc}(\Omega)$. Il existe $R_0 > 0$, tel que pour tout $r \in]0, R_0[$, on a pour tout $(u,p) \in H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ solution de [?]:
$$u = 0 \text{ dans } B(0,r) \quad \Rightarrow \quad u = 0 \text{ dans } B(0,2r).$$
De plus, on peut prendre $R_0 = min(\frac{M}{|a|_{L^\infty(B(0,d))}}, \frac{d}{2})$ où $\bar{B}(0,d) \subset \Omega$.

Démonstration du Lemme 3.2

Soit d tel que $\bar{B}(0,d) \subset \Omega$. Soit $\lambda > \text{Max}(\frac{|a|_{L^\infty(B(0,d))}}{M}, \frac{2}{d}, \frac{1}{r})$. On pose pour $x \in \lambda\Omega$,

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(\dfrac{x}{\lambda}) \\ \bar{p}(x) = \dfrac{1}{\lambda} p(\dfrac{x}{\lambda}) \\ \bar{a}(x) = a(\dfrac{x}{\lambda}). \end{cases}$$

On a $\Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} + ((\frac{\bar{a}}{\lambda}).\nabla)\bar{u} = 0$ dans $\lambda\Omega$ et $\bar{u} = 0$ dans $B(0, \lambda r)$ donc dans $B(0,1)$. On a $|\bar{a}|_{L^\infty(B(0,2))} \leq |a|_{L^\infty(B(0,d))} \leq \lambda M$. D'après le lemme 4.1, $\bar{u} = 0$ dans $B(0,2)$ soit $u = 0$ dans $B(0, 2/\lambda)$. Il suffit alors de choisir $r \leq R_0$ pour conclure. ▫

Démonstration de la Proposition 1.1.
Soit $B(x_0, r_0) \subset \omega$ et soit $x \in \Omega$. Il existe un chemin $\gamma \in C^\infty([0,1])$ reliant x_0 et x et tel que $Im\gamma \subset \Omega$. Soit U un voisinage borné de $Im\gamma$ tel que $\bar{U} \subset \Omega$. Il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout y de $Im\gamma$, $B(y, r_1) \subset U$. D'après le lemme 4.2, on a en posant $R_0 = min(\frac{r_1}{2}, \frac{M}{|a|_{L^\infty(U)}})$,

$$\forall r \in]0, R_0[, \quad \forall y \in Im\gamma, \quad u = 0 \text{ dans } B(y,r) \ \Rightarrow \ u = 0 \text{ dans } B(y, 2r).$$

On fixe un $r \in]0, R_0[$ et il est alors facile de montrer que le supremum de $\{t \in [0,1], \ \forall \tau \leq t, u = 0 \text{ dans } B(\gamma(\tau), r)\}$ est 1 et donc que $u = 0$ dans $B(x,r)$ ce qui montre la proposition 1.1. ▫

4 Cas d' évolution

La démarche pour le cas d' évolution est analogue au cas stationnaire. Cependant les opérateurs dépendent d' un paramètre (le temps) ce qui demandent des inégalités de Carleman "uniforme" en temps.

4. 1 Inégalité de Carleman

Soit $\varphi = \varphi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$. On note $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$. On note $p(t)$ l' opérateur de E^2 :

$$p(t)(x, D, h) = -h^2 e^{\frac{\varphi}{h}} \circ \Delta \circ e^{-\frac{\varphi}{h}}.$$

$p(t)$ a pour partie principale

$$p_0(t)(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j + i\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})^2.$$

Comme précédemment, on écrit $p(t) = a(t) + ib(t)$ où : $a(t) = \frac{p(t)+p^*(t)}{2} \in L^\infty(-T,T;E^2)$ a pour symbole principal $a_0(t) = Rep_0(t)$ et $b(t) = \frac{p(t)-p^*(t)}{2i} \in L^\infty(-T,T;E^1)$ a pour symbole principal $b_0(t) = Imp_0(t)$.
Soit U_0 un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, et supposons que φ_0 vérifie

(4.1)
$$\exists C_0 > 0, \quad (x,\xi) \in \bar{U}_0 \times \mathbf{R}^n \quad a_0(0)(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_0(0), b_0(0)\}(x,\xi) \geq C_0.$$

Il existe alors $\rho_0 > 0$ tel que pour $|t| \leq \rho_0$, φ_t vérifie

$$(4.2) \qquad (x,\xi) \in \bar{U}_0 \times \mathbf{R}^n \quad a_0(t)(x,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{a_0(t), b_0(t)\}(x,\xi) \geq \frac{C_0}{2}.$$

Lemme 4.1

Soit U_0 un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. On suppose que φ_0 vérifie [?], alors : $\exists \rho_0 > 0$, $\forall K$ compact contenu dans U_0, $\exists h_1 > 0$ $\forall h \in]0, h_1[$, $\forall v \in H_0^2(K)$ et $\forall t \in [-\rho_0, \rho_0]$ on a

$$|p(t)(x,D)v|_0^2 \geq |a(t)(x,D)v|_0^2 + 2Re(a(t)(x,D)v, ib(t)(x,D)v) \geq \frac{C_0}{8} h |v|_1^2.$$

La démonstration de ce lemme est très classique (voir [?]) dans le cas où l' on a un seul opérateur p (et elle est contenue dans la démonstration du théorème 3.1). Pour la famille d' opérateurs $p(t)$, il suffit d' utiliser [?] et l' uniformité de la dépendance en t fournie par $(p(t))_t \in L^\infty(-T,T;E^2)$. ▫

De même, on a la version uniforme en temps du théorème 3.1 :

Lemme 4.2

Soit U_0 un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. On suppose que φ vérifie [?]. Alors : $\exists \rho_0 > 0$, $\forall K$ compact contenu dans U_0, $\exists h_1 > 0$ $\exists d > 0$ et $c > 0$ tels que $\forall h \in]0, h_1[$, $\forall (y,f) \in H_0^1(U_0) \times L^2(U_0)^n$ telles que $\Delta y - div f \in L^2(U)$, toutes ces fonctions étant à support dans K, et $\forall t \in [-\rho_0, \rho_0]$, on a

(4.3)
$$\int_K |y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx + h^2 \int_K |\nabla y|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx \leq hc \int_K |f|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx + dh^3 \int_K |\Delta y - div f|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dx.$$

Remarque 4.1

Comme dans le théorème 3.1, on pourrait se placer dans un cadre un peu plus général et remplacer l' opérateur divergence par un opérateur d' ordre un en espace avec des coefficients uniformément bornés en temps.

Enfin, le Lemme 4.1 permet de montrer le

Lemme 4.3

Soit U_0 un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose que φ vérifie [?]. Alors :
$\exists \rho_0 > 0$, $\forall K$ *compact contenu dans* U_0, $\exists h_1 > 0$ *et* $c > 0$ *tels que* $\forall h \in]0, h_1[$, $\forall z \in L^2(-\rho_0, \rho_0; H_0^2(K)) \cap H_0^1(-\rho_0, \rho_0; L^2(K))$ *telles que* $z' - \Delta z \in L^2(U_0 \times (-\rho_0, \rho_0))$, *on a*

(4.4)
$$\int_{K\times(-\rho_0,\rho_0)} |z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt + h^2 \int_{K\times(-\rho_0,\rho_0)} |\nabla z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \leq$$
$$h^3 c \int_{K\times(-\rho_0,\rho_0)} |z' - \Delta z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt.$$

Démonstration du Lemme 4.3

On pose $v = ze^{\frac{\varphi}{h}}$ et on a

$$h^2(z' - \Delta z)e^{\frac{\varphi}{h}} = h^2 v' - h\varphi' v + p(t)(x, D)v.$$

On a

$$|h^2 v' + p(t)v|_0^2 = |h^2 v' + ib(t)v|_0^2 + |a(t)v|_0^2 + 2Re(h^2 v' + ib(t)v; a(t)v).$$

Or, d' après le lemme 4.1, il existe $\rho_0 > 0$ tel que
(4.5)
$$\frac{C_0}{8} h \int_{-\rho_0}^{\rho_0} |v(t)|_1^2 dt \leq \int_{-\rho_0}^{\rho_0} \left[|a(t)v(t)|_0^2 + 2Re(ib(t)v(t); a(t)v(t))dt\right.$$
$$\leq \int_{-\rho_0}^{\rho_0} |h^2 v' + p(t)v(t)|_0^2 dt + 2h^2 \left|Re\Big(\int_{-\rho_0}^{\rho_0} (v'(t); a(t)v(t))dt\Big)\right|$$

D' autre part, $a(t) = -\frac{h^2}{2}[e^{\varphi/h}\Delta e^{-\varphi/h} + e^{-\varphi/h}\Delta e^{\varphi/h}] = -h^2\Delta - |\nabla\varphi|^2$, donc

$$2Re\Big(\int_{-\rho_0}^{\rho_0} (v'(t); a(t)v(t))dt\Big) = \int_{-\rho_0}^{\rho_0}\int_K |v|^2(|\nabla\varphi|^2)' dxdt \leq d\int_{-\rho_0}^{\rho_0} |v|_0^2 dt,$$

pour un $d > 0$. On en déduit aisément que

$$\frac{C_0}{16} h \int_{-\rho_0}^{\rho_0} |v(t)|_1^2 dt \leq h^4 \int_{-\rho_0}^{\rho_0} |z' - \Delta z|_0^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dt + h^2 d \int_{-\rho_0}^{\rho_0} |v|_0^2 dt,$$

d' où le lemme 4.3. □

Remarque 4.2

Dans [?], J.C. Saut et B. Scheurer établissent une inégalité de Carleman pour les solutions de l' équation de la chaleur avec une phase φ explicite. Leur méthode consiste en une succession d' intégration par parties. Le résultat du lemme 4.3 est analogue mais il est présenté avec une phase quelconque (vérifiant l' hypothèse d' hypoellipticité) et il est démontré par une autre méthode.

4. 2 Démonstration du théorème 1.1

On note $B(r)$ la boule de $\mathbb{R}^{n+1}$ centrée en $(0,0)$ et de rayon r. Pour montrer le théorème 1.1, il suffit de montrer que si $u=0$ dans un demi-voisinage (dans $\mathbb{R}^{n+1}$) de $(0,0)$ de la forme

$$\{(t,x);\quad \psi(t,x)<0\}\cap B(\rho)$$

où ψ est C^∞, $\psi(0,0)=0$, $\nabla_x\psi(0,0)\neq 0$ alors u s' annule dans un voisinage de $(0,0)$.

Quitte à effectuer une rotation en x et à multiplier ψ par une constante, on peut supposer que $\nabla_x\psi(0,0)=(0,\cdots,0,1)$. Comme dans le cas stationnaire, on commence par démontrer un résultat d' unicité pour un "rayon" 1 et un potentiel petit. On note

$$W=\{(t,x),\quad |t|<1,\quad |x|<1\}.$$

On a le

Lemme 4.4

Il existe $M>0$ tel que pour tout $(u,p,a)\in L^2(-1,1;H^1(|x|<1))\times L^2(W)\times L^\infty(W)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} u'-\Delta u+(a.\nabla)u+\nabla p=0\\ divu=0\\ |a|_{L^\infty(W)}\leq M\\ u=0 \ \text{ dans } \ W\cap[x_n+M(|x'|+|t|)<0]\end{array}\right. \tag{4.6}$$

entraine $u=0$ dans un voisinage de $(0,0)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Démonstration du lemme 4.4

On commence par le choix de φ. On prend

$$\varphi(t,x)=(x_n+|x'|^2+t^2-\delta)^2\chi$$

où $\delta>0$ est à choisir et $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est telle que $\chi=1$ sur W.

Lemme 4.5

Il existe $\delta > 0$ et $r_0 > 0$ tels que φ vérifie [?] sur $U_0 = \{x, \quad |x| < r_0\}$ avec $C_0 = \delta^2$.

Démonstration du lemme 4.5

On a sur W

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j = 2[\xi_n + 2 \sum_{i<n} x_i \xi_i]^2 + 4 \sum_{i<n} (x_n + |x'|^2 - \delta) \xi_i^2. \tag{4.7}$$

En particulier, si r_0 est petit devant δ^2, on a pour $x \in U_0$,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_n} = -2\delta + O(\delta^2)$$

et pour $i < n$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} = O(\delta^3)$$

donc

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} = 8\delta^2 + O(\delta^3). \tag{4.8}$$

Or, on a

$$\{a_0, b_0\} = 4 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \partial x_j} [\xi_i \xi_j + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}]. \tag{4.9}$$

On déduit de (4.7), (4.8) et (4.9) qu' en (x, ξ) tel que $|\xi|^2 = |\nabla \varphi_0|^2 = O(\delta^2)$, on a

$$\{a_0, b_0\}(x, \xi) \geq \delta^2$$

pour δ assez petit. □

Dans toute la suite, δ et r_0 sont choisis pour que le lemme 4.5 soit satisfait. On applique alors les lemmes 4.1, 4.2, et 4.3 avec $U_0 = \{x, \quad |x| < r_0\}$. Cela donne l' existence de $\rho_0 > 0$ tel que l' on ait les conclusions des lemmes 4.1, 4.2, et 4.3. On fixe alors $r_1 > 0$ petit devant δ^2, r_0 et ρ_0 de telle sorte que l' on ait

$B(4r_1) \subset \{(t,x), \ \ |t| < \rho_0, \ \ |x| < r_0.\}$ On choisit ensuite $\zeta \in C_0^\infty(B(r_1))$ telle que $\zeta = 1$ sur $B(3r_1/4)$. On pose

$$\Sigma = supp[\nabla_{x,t}\zeta \cap \{x_n + M(|x'| + |t|) \geq 0\}].$$

Il existe alors $M_0 > 0$ tel que pour tout $M \in]0, M_0]$, on ait

$$\sup_{(t,x)\in\Sigma} \varphi(t,x) < \varphi(0,0) = \delta^2. \tag{4.10}$$

Comme $\nabla p = 0$ sur $W \cap [x_n + M(|x'| + |t|) < 0]$, on peut toujours y supposer que $p = 0$ (p est définie à une fonction du temps près). On pose $z = \zeta u$ et $q = \zeta p$. On a alors $\Delta p + div((a.\nabla)u) = 0$ donc

$$\Delta q = div[-(a.\nabla)z + (a.\nabla\zeta)u + 2\nabla\zeta p] - \Delta\zeta p + \nabla\zeta.(a.\nabla)u$$

soit

$$\Delta q + div[(a.\nabla)z - (a.\nabla\zeta)u - 2\nabla\zeta p] = G$$

où $G \in L^2$ est à support dans Σ.
D' autre part,

$$\begin{aligned} z' - \Delta z &= \zeta(u' - \Delta u) + u\zeta' - 2\nabla\zeta.\nabla u - \Delta\zeta u \\ &= -\nabla q - (a.\nabla)z + p\nabla\zeta + (a.\nabla\zeta)u + u\zeta' - 2\nabla\zeta.\nabla u - u\Delta\zeta \\ &= -\nabla q - (a.\nabla)z + F \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $F \in L^2$ est à support dans Σ. Avec $\rho_1 = \rho_0/2$ et $K = \{|x| \leq r_0/2\}$, on a $\Delta q \in L^2(-\rho_1, \rho_1; H^{-1}(K))$ et $supp_x(q(t)) \subset K$ donc $q \in L^2(-\rho_1, \rho_1; H_0^1(K))$. On en déduit

$$\begin{cases} z' - \Delta z \in L^2((-\rho_1, \rho_1) \times K) \\ z = 0 \ \text{ sur } \ \partial K \times (-\rho_1, \rho_1) \\ z(-\rho_1, x) = 0 \ \text{ dans } \ K \end{cases} \tag{4.12}$$

donc $z \in L^2(-\rho_1, \rho_1; H^2(K)) \cap H^1(-\rho_1, \rho_1; L^2(K))$ et comme $supp_x(z) \in K$ et $z(\rho_1, x) = 0$, on a $z \in L^2(-\rho_1, \rho_1; H_0^2(K)) \cap H_0^1(-\rho_1, \rho_1; L^2(K))$.
D' après les lemmes 4.2 et 4.3, il existe $c > 0$, $d > 0$ et $h_1 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_1]$, on ait

(4.13)
$$\int |z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt + h^2 \int |\nabla z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \leq ch^3 \int |\nabla q + (a.\nabla)z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} + ch^3 \int |F|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt$$

et
(4.14)
$$\int |q|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt + h^2 \int |\nabla q|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \leq ch \int |(a.\nabla)z - (a.\nabla\zeta)u + 2p\nabla\zeta|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt$$
$$+ dh^3 \int |G|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt.$$

Combinant ces deux inéquations, on obtient
(4.15)
$$\int |z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt + h^2 \int |\nabla z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \leq (4c^2 + 2ch)h^2 |a|^2_{L^\infty(W)} \int |\nabla z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt$$
$$+ ch^3 \int (|F|^2 + 2dh|G|^2) e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt + 4c^2h^2 \int |2p\nabla\zeta + (a.\nabla\zeta)u|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt.$$

En choisissant $M \in]0, M_0]$ vérifiant $4c^2M^2 < 1$, et pour $|a|_{L^\infty(W)} \leq M$, on a en posant
$$H^2 = (|F|^2 + |G|^2) + |2p\nabla\zeta + (a.\nabla\zeta)u|^2 \in L^1,$$
pour tout $h > 0$ assez petit,

$$\int |z|^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \leq \int H^2 e^{2\frac{\varphi}{h}} dxdt \tag{4.16}$$

avec

$$supp(H) \subset \Sigma. \tag{4.17}$$

En utilisant (4.10), (4.16), (4.17) et en passant à la limite lorsque $h \to 0$, on en déduit que $z = 0$ au voisinage de $(0, 0)$ ce qui prouve le lemme 4.4. □

Fin de la preuve du théorème 1.1
On effectue un changement d' échelle en posant pour

$$\begin{cases} \bar{u}(t,x) = u(\dfrac{t}{\lambda^2}, \dfrac{x}{\lambda}) \\ \bar{a}(t,x) = a(\dfrac{t}{\lambda^2}, \dfrac{x}{\lambda}) \\ \bar{p}(t,x) = \dfrac{1}{\lambda} p(\dfrac{t}{\lambda^2}, \dfrac{x}{\lambda}) \\ \psi_\lambda(t,x) = \lambda\psi(\dfrac{t}{\lambda^2}, \dfrac{x}{\lambda}). \end{cases} \tag{4.18}$$

On a $\bar{u} = 0$ dans $\psi_\lambda(t,x) < 0$. Comme $\psi_\lambda(t,x) = x_n + O(\frac{|x|+|t|}{\lambda})$ et que $\bar{u}' - \Delta\bar{u} + (\frac{\bar{a}}{\lambda}.\nabla)\bar{u} + \nabla\bar{p} = 0$, les hypothèses du lemme 4.4 sont satisfaites pour λ assez grand, et par suite $\bar{u}$ (donc u) est nulle dans un voisinage de $(0,0)$. ▫

Démonstration du corollaire 1.1

Soit $(x_0,t_0) \in \gamma$ et $r, \alpha > 0$ tels que $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = p = 0$ sur $(B(x_0,r) \cap \partial\Omega) \times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$. On prolonge u et p par 0 dans $B(x_0,r) \times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\cap \Omega^c$. On obtient ainsi une solution de [?] dans $(B(x_0,r) \cup \Omega) \times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ qui est nulle dans $(B(x_0,r) \cap \Omega^c) \times]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ donc nulle dans la composante horizontale de cet ensemble ce qui prouve le corollaire 1.1. ▫

References

[1] D. Robert. *Autour de l' approximation semi-classique.* Progress in Math. n 68, Birkhauser, 1987.

[2] E. Fernandez-Cara et J. Real. On a conjecture due to J.L. Lions. A paraitre dans Non Linear Analysis, Theory, Methods and Applications.

[3] L. Hormander. *Linear Partial Differential Operators.* Tome 3, Springer-Verlag, 1985.

[4] G. Lebeau et L. Robbiano. Controle exact de l'équation de la chaleur. Comm. Part. Diff. Eq., 20, p 335-356 (1995)

[5] X. Saint Raymond. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferentiel operators.* Studies in advance math, 1991.

[6] J.C. Saut et B. Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. Journal Differential Equations, 66, (1), 1987, p. 118-139.

[7] J.C. Saut et R. Temam. Generic properties of Navier Stokes equations. Indiana Univ. Math. Journal 29 p 427-445, 1980.

[8] C. Fabre. A paraitre.