Régularité et Unicité pour le problème de Stokes

Caroline Fabre* et Gilles Lebeau **

* Université de Nice, Laboratoire J.-A. Dieudonné,
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex, France
** Ecole polytechnique, C.M.A.T
91128 Palaiseau Cedex, France

8 avril 2001

1 Introduction

Cet article établit des résultats de prolongement unique et de régularité des solutions d'équations de fluides incompressibles. Les questions que nous abordons ici se sont posées de manière naturelle à la suite des travaux [1], [2], [3], [7] et [8].

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T > 0$ et $Q = \Omega \times (-T, T)$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert contenu dans Q, nous notons

$$C(\mathcal{O}) = \{(x,t) \in Q\,, \exists x_0 \in \Omega\,, (x_0,t) \in \mathcal{O}\}$$

la composante horizontale de $\mathcal{O}$.
Nous notons $L_1(\partial) = b_1\partial_{x_1} + \cdots + b_d\partial_{x_d} + b_0$ tout opérateur différentiel d'ordre un qui n'agit que sur les variables d'espaces avec $b_0 \in L^\infty_{loc}(Q)$ et, pour $1 \leq j \leq d$, $b_j \in L^\infty_{loc}(-T,T; W^{1,\infty}_{loc}(\Omega))$. Enfin, $a = a(x,t)$ désigne une matrice carrée de taille d.

Le premier résultat que nous montrons est le

Théorème 1.1 *On suppose que* Ω *est connexe et que les coefficients de a sont dans* $L^\infty_{loc}(Q)$. *Soit* $(u,\pi) \in L^2_{\rm loc}(Q)^d \times \mathcal{D}'(Q)$ *une solution du problème de Stokes*

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u + L_1(\partial)(au) = \nabla\pi \ \textit{dans } Q \ , \\ \mathrm{div} u = 0 \ \textit{dans } Q \ . \end{cases}$$

Si $u = 0$ *dans* $\mathcal{O}$ *alors* u *est nulle dans* $C(\mathcal{O})$.

Remarques :

1. Ce résultat d'unicité est étroitement lié à l'étude de la contrôlabilité des fluides. Nous renvoyons à [4] et ses références tout lecteur intéréssé par ces problèmes.

2. Le théorème 1.1 fut démontré pour des champs de vitesse u dans $L^2_{loc}(-T,T;H^2_{loc}(\Omega))$ et des pressions $\pi \in L^2_{loc}(t;H^1_{loc}(\Omega))$ et lorsque les coefficients de a sont dans $L^\infty_{loc}(-T,T;W^{2,\infty}_{loc}(\Omega))$ dans [8], [7], et [3] (par ordre chronologique et étapes successives). Il fut ensuite obtenu pour des champs u dans $L^2_{loc}(-T,T;H^1_{loc}(\Omega))$, des pressions π dans $L^2_{loc}(Q)$ et des coefficients de a dans $L^\infty_{loc}(Q)$ dans [1] et [2] (par étapes). La question naturelle qui se pose alors est de savoir quelle régularité de pression on peut attendre pour les solutions du problème de Stokes.

Nous démontrons le

Théorème 1.2 *Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^d$, $u \in L^2_{\rm loc}(t,(H^1_0(\Omega))^d)$ *un champ de vecteurs,* $f \in L^2_{\rm loc}(t;(H^{-1}(\Omega))^d)$ *un champ de forces et* $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$ *une pression solutions au sens des distributions dans* $\mathbb{R}_t \times \Omega$ *de* $(\partial_t - \Delta)u = -\nabla p + f$, div $u = 0$.

Alors la pression p vérifie

$$\begin{cases} p = r + q + h(t) \ , \ \ h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t) \\ \\ q \in L^2_{\rm loc}(t, L^2(\Omega)) \\ \\ \Delta r = 0 \quad r \in H^{-1/4}_{\rm loc}(t, H^{1/2}(\Omega)) \end{cases}$$

Nous allons plus précisément calculer (voir Proposition 7.1) le terme résiduel r en fonction de la donnée f, ce qui prouvera entre autre que le résultat précédent est optimal et fournira une CNS sur la force pour avoir la régularité L^2 sur la pression. Cette CNS montre en particulier que, même dans le cas de champs de force f de la forme $L_1(\partial)(au)$, on ne peut espérer la régularité L^2

de la pression. On notera que la version locale du théorème 1.2 (par exemple en imposant la condition de Dirichlet uniquement sur une partie du bord) est fausse.

Remarque :
Considérons le problème de Stokes global

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \nabla p + f \text{ dans } \Omega \times (0,T) \ , \\ \mathrm{div} u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T) \ , \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0. \end{cases}$$

Il est classique (voir [6], [9]) que si le champs de force f est dans $L^2(Q)^d$ et si la donnée initiale u^0 est dans $L^2(\Omega)^d$ avec $\mathrm{div} u^0 = 0$, alors on peut choisir une pression $p \in L^2_{loc}(Q)$ (et même mieux en espace). Des résultats sont donnés également dans [6] lorsque $f \in L^r(Q)$, avec $r > 1$. Lorsque $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))^d$ (ceci est le cas si l'on pense à $f = L_1(\partial)(au)$ avec des coefficients de a dans $L^\infty(Q)$) alors nous savons (voir [9]) que l'on peut choisir une pression $p \in H^{-1}_{loc}(0,T;L^2(\Omega))$. Dans [2], nous avons démontré que si $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))^d$ et si, pour presque tout t, les distributions $f(t)$ sont à supports dans un compact indépendant du temps contenu dans Ω (donc si elles ne touchent pas le bord) alors il existe une pression dans $L^2_{loc}(Q)$. Ce résultat permettait d'obtenir le résultat d'unicité énoncé dans le théorème 1.1 pour les solutions du problème global ci dessus lorsque les coefficients de a sont à supports loin du bord indépendamment du temps ou pour des ouverts $\mathcal{O}$ particuliers. Le théorème 1.2 prouve que le cadre de régularité des solutions dans lequel les résultats d'unicité furent énoncés jusqu'alors était insuffisant.

Dans la suite de l'introduction, nous décrivons notre démarche.

Le théorème 1.1 repose sur deux inégalités de Carleman : l'une concerne le noyau de la chaleur (et traite le champ de vitesse) et l'autre concerne le laplacien (et traite la pression). Les deux principales difficultés sont les suivantes : dans les deux cas, les seconds membres sont à valeurs dans des espaces de Sobolev à exposants négatifs en espace (-1 pour la partie chaleur et -2 pour le laplacien) ; d'autre part, il faut établir des inégalités valides dans les espaces où vivent la vitesse et la pression et c'est bien sûr la pression, qui demande un traitement particulier. Dans [1] et [2], nous avons utilisé un calcul pseudo-différentiel n'agissant que sur les variables d'espace pour établir les inégalités de Carleman (le temps était traité comme un paramètre) : c'est l'utilisation de ce calcul, non adapté à la partie chaleur, qui limitait nos résultats à des pressions ayant une régularité L^2 en temps. Nous introduisons ici un calcul spécifique pour le noyau de la chaleur, agissant sur les variables d'espace et de temps mais de manière différente : c'est ce calcul qui nous permet d'établir une inégalité valide dans l'espace, que nous appelons X ici pour simplifier, où vit la pression. Dans la section 2, nous détaillons les deux calculs pseudo-différentiels qui seront utilisés par la suite, nous introduisons aussi les espaces dans lesquels les termes de pression seront évalués. Dans la section 3, nous établissons un premier résultat de régularité de pression : celui ci est de nature différente du résultat du théorème 1.2 : il est local, ne suppose pas la régularité $L^2(t; H^1(\Omega))$ de la vitesse et c'est l'espace naturel qui apparaît dans les inégalités de Carleman. Dans la section 4, nous établissons l'inégalité de Carleman pour le noyau de la chaleur. Dans la section 5, nous établissons l'inégalité pour le Laplacien sur les espaces X. Enfin, dans la section 6, nous démontrons le théorème 1.1. Le théorème 1.2 est démontré dans la section 7 par une technique de projecteurs de Calderon adaptés à l'équation de la chaleur.

2 Cadre fonctionnel

Dans cette section, on définit les deux calculs h-pseudodifférentiels utilisés par la suite ainsi que des espaces, notés X, dans lesquels les termes de pression seront évalués. Le petit paramètre h du calcul vérifie toujours $0 < h < 1$.Nous renvoyons à [5] pour les propriétés classiques du calcul pseudodifférentiel que nous utilisons.

2.1 Calcul dans $\mathbb{R}^d$

Il s'agit du calcul que nous avions utilisé dans [1] et qui n'agit que sur les variables d'espace. On note $D_j = \frac{h}{i}\partial_j$ et $\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ pour $\xi \in \mathbb{R}^d$. S_ξ^m est l'espace des symboles d'ordre $m \in \mathbb{R}$ défini par : $a(x, \xi, h) \in S_\xi^m$ si

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \quad \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \quad \forall x, \xi, h \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha\beta}\lambda(\xi)^{m-|\beta|}$$

et qui vérifient

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \exists a_j(x,\xi) \in S^{m-j} \quad a(x,\xi,h) \in \sum_{j=0}^{N} a_j h^j + h^{N+1} S^{m-N-1}.$$

Le symbole principal de a est $\sigma_\xi(a) = a_0$.
Si $u(.,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit l'opérateur pseudodifferentiel $a(x,D,h)$ d'ordre m par

$$a(x,D,h)u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} a(x,h\xi,h)\hat{u}(\xi,t)d\xi$$

où $\hat{u}(\xi,t) = \int e^{-ix\xi} u(x,t)dx$ est la transformée de Fourier en x.
On note E_ξ^m l'espace des opérateurs d'ordre m et $E_\xi^{-\infty} = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{R}} E_\xi^m$.
Enfin on note $|v|_0$ la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ de v, et $|v|_1 = |\lambda(D)v|_0 \sim (|v|_0^2 + h^2|\nabla v|_0^2)^{1/2}$.
Si $a \in E_\xi^m, b \in E_\xi^\ell$ alors $a \circ b \in E_\xi^{m+\ell}$ et $\sigma_\xi(a \circ b) = a_0 b_0$. Le crochet $[a,b] = a\circ b - b \circ a$ appartient à $hE_\xi^{\ell+m-1}$ et on a $\sigma_\xi(\frac{i}{h}[a,b]) = \{a_0,b_0\}_{\xi,x} = \partial_\xi a_0 \partial_x b_0 - \partial_x a_0 \partial_\xi b_0$.
Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}), \varphi = \varphi(x,t)$, nous notons $\mathcal{P}(t)$ l'opérateur de E_ξ^2 défini par

$$\mathcal{P}(t) = -h^2 e^{\varphi/h} \circ \Delta \circ e^{-\varphi/h}.$$

On a

$$\mathcal{P}(t)v = -h^2\Delta v + 2h\nabla\varphi.\nabla v - |\nabla\varphi|^2 v + h(\Delta)\varphi v$$

et

$$\sigma_\xi(\mathcal{P}(t)) = (\xi + i\nabla\varphi)^2.$$

Dans [1] et [2], nous avons montré la

Proposition 2.1 *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et soit K un compact contenu dans U. Si $\nabla\varphi(.,0)$ ne s'annule pas sur U et si φ vérifie*

(2.1) $$\exists c_0 > 0 \quad (x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^d \textit{ et } Re\sigma_\xi(\mathcal{P}(0))(x,\xi) = 0 \Longrightarrow$$

$$\{Re\sigma_\xi\mathcal{P}(0), \mathrm{Im}\sigma_\xi\mathcal{P}(0)\}_{\xi,x}(x,\xi) \geq c_0$$

alors il existe $\rho_0 > 0$, $h_1 > 0$, $C > 0$, tels que pour tout z, r_α ($|\alpha| \leq 2$) vérifiant

$$\begin{cases} \mathcal{P}(t)z = \sum_{|\alpha|\leq 2}(h\partial)^\alpha r_\alpha \\ z, r_\alpha \in L^2(U \times (-\rho_0,\rho_0)) \\ \text{supp } (z,r_\alpha) \subset K \times (-\rho_0,\rho_0) \end{cases}$$

on ait pour presque tout $t \in (-\rho_0, \rho_0)$ *et tout* $h \in]0, h_1[$

$$\sqrt{h}|z(t)|_0 \leq C \sum_{|\alpha|\leq 2} |r_\alpha(t)|_0 \tag{2.1)'$$

Remarque
On peut remplacer $(h\partial)^\alpha$ par tout opérateur d'ordre $|\alpha|$.

2.2 Calcul dans $\mathbb{R}^{d+1}$

Ce calcul est adapté au noyau de la chaleur et agit sur les variables d'espace et de temps. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d, \tau \in \mathbb{R}$, on note

$$\Lambda(\xi, \tau) = [1 + |\xi|^4 + \tau^2]^{1/4} \sim 1 + |\xi| + \sqrt{|\tau|}.$$

Pour $1 \leq j \leq n$, on note $D_j = \frac{h}{i}\partial_{x_j}$ et $D_t = \frac{h^2}{i}\partial_t$.

S^m désigne l'espace des symboles $a = a(x, t, \xi, \tau, h) \in C^\infty$ définis sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times]0, h_1, [$ t.q.

$$\forall (\alpha, \alpha') \in \mathbb{N}^{d+1},\ \forall (\beta, \beta') \in \mathbb{N}^{d+1},\ \exists C > 0,\ \forall (x, t, \xi, \tau, h),$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_t^{\alpha'} \partial_\xi^\beta \partial_\tau^{\beta'} a(x, t, \xi, \tau, h)| \leq C\Lambda(\xi, \tau)^{m-|\beta|-2\beta'}$$

et

$$\forall j \quad \exists A_j \in S^{m-j},\ A_j = A(x, t, \xi, \tau),$$

t.q

$$a \in \sum_{j=0}^{N} h^j A_j + h^{N+1} S^{m-N-1}.$$

On notera $\sigma(a) = A_0$ le symbole principal de a.

L'opérateur $a(x, t, D_x, D_t, h)$, que nous noterons plus simplement a, associé au symbole $a(x, t, \xi, \tau, h)$ est défini par

$$a(u)(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{i(x\xi + t\tau)} a(x, t, h\xi, h^2\tau, h)\hat{u}(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

où $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ et $\hat{u}(\xi, \tau) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} e^{-i(x\xi + t\tau)} u(x, t) dt dx$ est la transformée de Fourier totale de u.

E^m désignera l'espace des opérateurs définis par un symbole d'ordre m.
On note
$$\mathcal{H}^s = \{u; \Lambda^s(\xi,\tau)\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})\}.$$
On a donc
$$\mathcal{H}^0 = L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \text{ et } \mathcal{H}^1 = L^2_t(H^1_x) \cap H^{1/2}_t(L^2_x).$$
On note enfin $\|v\|_{s,h} = \|\Lambda^s(D_x,D_t)v\|_0$, $\|v\|_s = \|v\|_{s,1}$ et on a $\| v\|_0 = \|v \|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}$.
Si $a \in E^m$, a envoie $\mathcal{H}^s$ dans $\mathcal{H}^{s-m}$ et
$$\exists C_s > 0, \quad \forall h, \quad \|a(u)\|_{s-m,h} \leq C_s \|u\|_{s,h}.$$
Si $(a,b) \in E^m \times E^\ell$ sont de symboles $a(x,t,\xi,\tau)$ et $b(x,t,\xi,\tau)$ indépendants de h, alors $[a,b] = a\circ b - b \circ a \in hE^{m+\ell-1}$ et son symbole s'écrit $\frac{h}{i}\{a,b\}_{\xi,x} + {}+h^2 S^{m+\ell-2}$.
Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, on note $\mathbf{P}$ l'opérateur de E^2 défini par
$$\mathbf{P} = h^2 e^{\varphi/h} \circ (\partial_t - \Delta) \circ e^{-\varphi/h} \ .$$
Son symbole est $p_0(x,t,\xi,\tau) + hS^0$ où
$$p_0(x,t,\xi,\tau) = i(\tau + 2\nabla\varphi.\xi) + |\xi|^2 - |\nabla\varphi|^2.$$
On notera $\mathbf{P}_0$ l'opérateur de E^2 défini par le symbole p_0 et $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_0^*}{2}$, $\mathbf{I} = \frac{\mathbf{P}_0-\mathbf{P}_0^*}{2i}$ les décompositions autoadjointes de $\mathbf{P}_0$. Les symboles de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{I}$ s'écrivent
$$\begin{aligned} R &= |\xi|^2 - |\nabla\varphi|^2 + hS^0 \\ I &= \tau + 2\nabla\varphi\xi + hS^0 \end{aligned}$$
donc avec $\sigma(\mathbf{R}) = R_0$, $\sigma(\mathbf{I}) = I_0$ on a $[\mathbf{R},\mathbf{I}] \in [R_0, I_0] + h^2E^1$. Comme $[i\tau, |\nabla\varphi|^2] = h^2\partial_t|\nabla\varphi|^2$, le symbole de $[\mathbf{R},\mathbf{I}]$ s'écrit $\frac{h}{i}\{R_0,I_0\}_{\xi,x} + h^2S^1$.
Nous utiliserons les deux propriétés suivantes, conséquences des estimations elliptiques standarts :

Propriété 2.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$. Si $a \in E^2$ vérifie pour un $c_1 > 0$*
$$\forall (x,t,\xi,\tau) \in U \times \mathbb{R}^{d+1} \quad \mathrm{Re}\ \sigma(a)(x,t,\xi,\tau) \geq c_1 \Lambda(\xi,\tau)^2$$
alors on a
$\forall K$ compact, $K \subset U$, $\exists h_K > 0$ $\forall u \in \mathcal{H}^1$ à support dans K, $\forall h \in]0, h_K[$
$$\mathrm{Re}(a(u),u) \geq \frac{c_1}{4}\|u\|^2_{1,h}.$$

Propriété 2.2 *Si $p \in E^2$ vérifie*

$\exists c > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x, t,\ \forall (\xi, \tau),$

$$|\xi|^2 + |\tau| \geq R \quad \Rightarrow |\sigma(p)(x, t, \xi, \tau)| \geq c\Lambda(\xi, \tau)^2,$$

alors il existe $e \in E^{-2}$, il existe $\alpha \in E^{-\infty}$ avec $\alpha(t, x, \xi, \tau) = 0$ si $|\xi|^2 + |\tau| \geq 2R$, et il existe $q \in E^{-1}$, tels que $e \circ p = 1 + \alpha + hq$.

2.3 Les espaces $X(U)$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, on appelle

$$X(U) = \left\{ \pi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}), \forall \psi \in C_0^\infty(U), \psi = \psi(x), \frac{\lambda(\xi)}{\Lambda^2(\xi, \tau)} \widehat{\psi\pi} \in L^2_{\xi,\tau} \right\} .$$

Remarque : On peut définir aussi l'espace

$$X_h(U) = \left\{ \pi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}), \forall \psi \in C_0^\infty(U), \frac{\lambda(h\xi)}{\Lambda^2(h\xi, h^2\tau)} \widehat{\psi\pi} \in L^2_{\xi,\tau} \right\}.$$

On a alors $X_h(U) = X(U)$, seules les normes sur ces espaces sont différentes (et équivalentes à h fixé).

Propriété 2.3 *Nous avons*
(i) Si $\pi \in X(U)$ et si $\rho \in C_0^\infty(U \times \mathbb{R})$ alors $\rho\pi \in X(U)$
(ii) $H_t^{-1}(\mathbb{R};\ H^1(U)) + L_t^2(\mathbb{R}, H^{-1}(U)) \subset X(U)$

Démonstration :
(i) Soit $\psi \in C_0^\infty(U)$ et soit $\psi_0 \in C_0^\infty(U)$ tels que $\psi_0 = 1$ sur le support de ψ. On a $\psi\rho\pi = \psi\pi\psi_0\rho$ donc $\widehat{\psi\rho\pi} = \widehat{\psi\pi} * \widehat{\psi_0\rho}$. D'autre part,

$$\exists c > 0,\ \forall (\xi, \tau, \xi', \tau'), \begin{cases} \lambda(\xi) \leq c\lambda(\xi - \xi')\lambda(\xi') \\ \Lambda(\xi, \tau)^{-2} \leq c\Lambda^2(\xi - \xi', \tau - \tau')\Lambda^{-2}(\xi', \tau') \end{cases}$$

donc

$$\frac{\lambda(\xi)}{\Lambda^2(\xi, \tau)} |\widehat{\psi\rho\pi}(\xi, \tau)| \leq c^2 \frac{\lambda}{\Lambda^2} |\widehat{\psi\pi}| * \lambda\Lambda^2 |\widehat{\psi_0\rho}|.$$

Comme $\pi \in X(U)$ et que $\lambda\Lambda^2\widehat{\psi_0\rho} \in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$, on a $\frac{\lambda(\xi)}{\Lambda^2(\xi,\tau)}\widehat{\psi\rho\pi} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.

(ii) Si $\psi \in C_0^\infty(U), \psi\hat{\pi}^t = \widehat{\psi\pi}^t \in \lambda(\tau)L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d)) + L^2_\tau(\mathbb{R}, H^{-1}(\mathbb{R}^d))$ d'où on déduit $\pi \in X(U)$.

Remarque : (i) est encore vrai si $\rho = \rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si K est un compact de $\mathbb{R}^{d+1}$, on notera

$$X^K = X(\mathbb{R}^d) \cap [\pi \in \mathcal{S}', \mathrm{supp}\pi \subset K].$$

Si $\pi \in X(\mathbb{R}^d)$ est à support compact, on notera

$$\|\pi\|_{X,h} = \|\lambda(h\xi)\Lambda^{-2}(h\xi, h^2\tau)\hat{\pi}\|_0.$$

On a la

Propriété 2.4 *Pour* $0 < h < 1$, *on a*

$$h\|\pi\|_{X,1} \leq \|\pi\|_{X,h} \leq \frac{1}{h^2}\|\pi\|_{X,1}, \tag{2.2}$$

$$\|\pi\|^2_{X,h} = \int_{\mathbb{R}} |(\Lambda^{-2}\pi)(t)|_1^2 dt, \tag{2.3}$$

$$f \in X^K, \quad g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}) \Longrightarrow gf \in X^K \tag{2.4}$$

et

$$\exists\ c(g) > 0, \quad \forall h < 1, \quad \|gf\|_{X,h} \leq c(g)\|f\|_{X,h}$$

où

$$c(g) = \mathcal{O}(\sum_{|\alpha| \leq d+5} \|\partial^\alpha g\|_{L^1}).$$

Démonstration : Les propriétés (2.2) et (2.3) sont claires. Nous démontrons (2.4). Soit $u(x,t) = \Lambda^{-2}(D_x, D_t)(gf)$. On a

$$\|\lambda(D_x)u\|_0 = \|\lambda(h\xi)\Lambda^{-2}(h\xi, h^2\tau)\hat{g} * \hat{f}(\xi,\tau)\|_0$$

où $\wedge$ est la transformée de Fourier totale.
Comme

$$\hat{g} * \hat{f}(\xi,\tau) = \int \hat{f}(\xi',\tau')\hat{g}(\xi-\xi',\tau-\tau')d\xi' d\tau'$$

et qu'il existe $c > 0$ tel que pour $h > 0$ on ait

$$\begin{cases} \Lambda^{-2}(h\xi,h^2\tau) & \leq c\Lambda^2(h(\xi-\xi'),h^2(\tau-\tau'))\Lambda^{-2}(h\xi',h^2\tau') \\ \lambda^{+1}(h\xi) & \leq c\lambda(h(\xi-\xi'))\lambda^{+1}(h\xi') \end{cases}$$

on obtient pour tout ξ,τ

$$|\lambda(h\xi)\Lambda^{-2}(h\xi,h^2\tau)\hat{g}*\hat{f}(\xi,\tau)| \leq c^2\int(\lambda^{+1}(h\xi')\Lambda^{-2}(h\xi',h^2\tau')|\hat{f}(\xi',\tau')|)\times$$

$$\begin{aligned} &\times\Lambda^2(h(\xi-\xi'),h^2(\tau-\tau'))\lambda(h(\xi-\xi'))|\hat{g}(\xi-\xi',\tau-\tau')|d\xi'd\tau' \\ &\leq c^2\lambda^{+1}(h.)\Lambda^{-2}(h.,h^2.)|\hat{f}|*\Lambda^2(h.,h^2.)\lambda(h.)|\hat{g}|\ . \end{aligned}$$

Comme $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, on a $\Lambda^2(h\xi,h^2\tau)\lambda(h\xi)|\hat{g}|\in L^1(\mathbb{R}^{d+1})$. D'autre part, $f\in X^K$, donc $\lambda^{-1}(h\xi)\Lambda^2(h\xi,h^2\tau)\hat{f}\in L^2$. On en déduit que

$$\Big(\lambda(h\xi)\Lambda^{-2}(h\xi,h^2\tau)\hat{f}\Big)*(\hat{g}\lambda(h\xi)\Lambda^2(h\xi,h^2\tau))\in L^2$$

et

$$\begin{aligned} ||fg||_{X,h} &\leq c^2||\lambda^{-1}(h\xi)\Lambda^2(h\xi,h^2\tau)\hat{f}||_0||\lambda(h\xi)\Lambda^2(h\xi,h^2\tau)\hat{g}||_{L^1} \\ &\leq c^2||f||_{X,h}||\lambda(\xi)\Lambda^2(\xi,\tau)\hat{g}||_{L^1} \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété 2.4.

3 Régularité locale de la pression

Dans cette section, nous établissons un premier résultat de régularité de pression. Celui ci nous permettra ensuite de travailler dans les espaces définis dans la section précédente. Nous commençons par rappeler l'inégalité de Poincaré : par souci de complétude, nous en donnons une démonstration.

Lemme 3.1 *(Inégalité de Poincaré)*
Soit V un ouvert borné, connexe, régulier de $\mathbb{R}^d$, et $\varphi\in C_0^\infty(V),\varphi\neq 0$. Pour tout $s\in\mathbb{R}$, il existe $C_s>0$ tel que pour tout $p\in\mathcal{D}'(V)$ vérifiant $\nabla p\in H^s(V)$, on ait

$$p(x)=c+q(x)\ ;\ c=\int p(x)\varphi(x)dx$$

$$||q||_{H^{s+1}(V)}\leq C_s||\nabla p||_{H^s(V)}$$

(où $H^s(V)=\{u;\exists f\in H^s(\mathbb{R}^d), f_{|V}=u\}$ est muni de la norme quotient)

Démonstration : Soit $f=\operatorname{div}\nabla p=\Delta p\in H^{s-1}(V)$, et $\underline{f}\in H^{s-1}_{\text{comp}}(\mathbb{R}^d)$ un prolongement de f. Soit $\underline{g}\in H^{s+1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\Delta\underline{g}=\underline{f}$ et $g=\underline{g}_{|V}$. On a $p=g+r$, $\|g\|_{H^{s+1}(V)}\le C^{te}_s\|\nabla p\|_{H^s(V)}$ et $\Delta r=0$, $\|\nabla r\|_{H^s(V)}\le C^{te}_s\|\nabla p\|_{H^s(V)}$. Pour tout j, on a $\Delta(\frac{\partial r}{\partial x_j})=0$, donc $\|\frac{\partial r}{\partial x_j}\|_{H^{s-1/2}(\partial V)}\le C^{te}_s\|\nabla r\|_{H^s(V)}$. Sur toute composante connexe Q_ℓ de ∂V, on a donc $r_{|Q_\ell}=c_\ell+\gamma_\ell$, où c_ℓ est une constante et $\|\gamma_\ell\|_{H^{s+1/2}(Q_\ell)}\le C^{te}_s\|\nabla r\|_{H^s(V)}$. Il en résulte $r(x)=d(x)+\gamma(x)$, $\|\gamma\|_{H^{s+1}(V)}\le C^{te}_s\|\nabla p\|_{H^s(V)}$, et $d\in\mathcal{H}=\{d\in C^\infty(\bar V)\ ,\ \Delta d=0\ ,\ d_{|Q_\ell}=C^{te}_\ell\}$. Il suffit donc de vérifier le lemme pour les éléments de $\mathcal{H}$, ce qui est clair, $\mathcal{H}$ étant de dimension finie, puisqu'on a $\{h\in\mathcal{H}\ ,\ \nabla h=0\}\Longleftrightarrow h=C^{te}$.

Proposition 3.1 *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^d, T>0$ et $Q=\Omega\times(-T,T)$. Soit $p\in\mathcal{D}'(Q)$ tel que $\nabla p=\partial_t f+\sum\limits_{|\alpha|\le 2}\partial_x^\alpha g_\alpha$ où $f,\ g_\alpha\in L^2_{\text{loc}}(Q)$.*
Alors pour tout ouvert U avec $\bar U\subset\Omega$ et $\rho_0\in]0,T[$, il existe $\pi\in H^{-1}(\mathbb{R},H^1(\Omega))+L^2(\mathbb{R},H^{-1}(\Omega))$, et $c(t)\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tels que

$$p(x,t)=c(t)+\pi(x,t)\ \text{sur}\ U\times(-\rho_0,\rho_0).$$

Démonstration : Soit $\varphi(t)\in C^\infty_0(]-T,T[)$, $\varphi=1$ sur un voisinage de $[-\rho_0,\rho_0]$. Quitte à changer f en φf, g_0 en $\varphi g_0-\varphi' f$ et pour $|\alpha|\ne 0$, g_α en φg_α, on peut supposer

$$\nabla(\varphi(t)p)=\partial_t f+\sum_{|\alpha|\le 2}\partial_x^\alpha g_\alpha, f, g_\alpha\in L^2_t(L^2_{\text{loc}}(\Omega))$$

On considère $\rho=\rho(x),\theta=\theta(x),\psi=\psi(x)$ trois fonctions de $C^\infty_0(\Omega)$ vérifiant

$$\psi=1 \text{ sur un voisinage de } U$$

$$\theta=1 \text{ sur le support de } \psi$$

$$\rho=1 \text{ sur le support de } \theta\ .$$

On a $\theta\nabla_x(\rho\varphi(t)p)=\theta\rho\nabla(\varphi(t)p)$ car $\theta\nabla\rho=0$. On pose $\omega=\rho\varphi(t)p$ et on note $\wedge$ la transformée de Fourier en temps. Quitte à modifier f, g_α on a

$$\theta\nabla\hat\omega=i\tau\hat f+\sum_{|\alpha|\le 2}\partial_x\hat g_\alpha$$

où $\hat{f}, \hat{g}_\alpha \in L^2_\tau(L^2(\mathbb{R}^d))$. Soit $\chi = \chi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\chi = 1$ sur $|\xi| \leq 1$, $\chi = 0$ sur $|\xi| \geq 2$, $0 \leq \chi \leq 1$. En utilisant le calcul h-pseudodifférentiel défini en 2.1, on a

$$\begin{aligned}\psi\chi(D)(\theta\nabla\hat{\omega}) &= i\psi\tau\chi(D)(\hat{f}) + \textstyle\sum_{|\alpha|\leq 2}\psi\chi(D)(\partial_x^\alpha \hat{g}_\alpha) \\ &= i\psi\tau\chi(\hat{f}) + i^{|\alpha|}h^{-|\alpha|}\psi\chi \circ D_x^\alpha \hat{g}_\alpha\end{aligned}$$

en utilisant la convention des indices répétés (en α).
D'autre part,

$$\psi\chi(D)(\theta\nabla\hat{\omega}) = \psi[\chi(D), \theta]_\xi(\nabla\hat{\omega}) + \psi\theta\nabla(\chi(D)\hat{\omega})$$

donc

$$\psi\theta\nabla(\chi(D)\hat{w}) = -\psi[\chi(D), \theta]_\xi(\nabla\hat{\omega}) + i\psi\tau\chi(\hat{f}) + i^{|\alpha|}h^{-|\alpha|}\psi\chi(D_x^\alpha \hat{g}_\alpha).$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\psi[\chi(D), \theta]_\xi(h\nabla) \in h^N E_\xi^{-\infty}$ car $\psi\partial_x\theta = 0$ donc il existe $R_N \in E_\xi^{-\infty}$, tel que

$$\psi\nabla(\chi(D)\hat{\omega}) = i\tau\psi\chi(\hat{f}) + i^{|\alpha|}h^{-|\alpha|}\psi\chi(D_x^\alpha \hat{g}_\alpha) + h^N R_N(\hat{\omega}).$$

De plus, il existe $s > 0$ tel que $\frac{\hat{\omega}}{(1+|\tau|)^s} \in L^2(\mathbb{R}, H^{-s}(\mathbb{R}^d))$ donc en choisissant $h = \frac{1}{(1+\tau^2)^{1/4}}$, on a en posant $\lambda(\tau) = (1+\tau^2)^{1/2}$,

$$\psi\nabla(\chi(D)\hat{\omega}) = i\psi\tau\chi(\hat{f}) + \lambda(\tau)^{|\alpha|/2} i^{|\alpha|}\psi\chi(D_x^\alpha \hat{g}_\alpha) + \lambda(\tau)^{-N/2}R_N(\hat{\omega}) \ .$$

Comme $R_N \in E_\xi^{-\infty}$,pour N grand on a $\lambda(\tau)^{-N/2}R_N(\hat{\omega}) \in L^2_{\tau,x}$. De plus $\psi\chi \circ D_x^\alpha \in E_\xi^{-\infty}$ donc $\psi\chi \circ D_x^\alpha \hat{g}_\alpha \in L^2_{\tau,x}$ et comme $|\alpha| \leq 2$, on en déduit que $\lambda(\tau)^{\frac{|\alpha|}{2}-1}\psi\chi(D_x^\alpha \hat{g}_\alpha) \in L^2_{\tau,x}$. Il existe donc $H(\tau, x) \in L^2_{\tau,x}$ tel que $\nabla(\chi(D)\hat{\omega}) = \psi\nabla(\chi(D)\hat{\omega}) = \lambda(\tau)H$ sur un voisinage de U.
Soit V un voisinage de $\bar{U}$, $V \subset (\psi = 1)$. En appliquant l'inégalité de Poincaré stationnaire sur V on en déduit qu'il existe c_0 tel que pour presque tout τ, on ait

$\exists C(\tau) \in \mathbb{R} \quad \exists q_1(\tau, x) \in H^1_{\text{loc}}(V)$ tel que

$$\chi(D)\hat{\omega}(\tau, x) = C(\tau) + q_1(\tau, x)$$

pour $x \in V$ avec

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} |q_1(\tau, .)|_{H^1(U')} \leq c_0\lambda(\tau)|H(\tau, .)|_{L^2(V)} \text{ pour presque tout } \tau \ . \\ \forall U' \text{ ouvert }, \quad \bar{U}' \subset V \ . \end{cases}$$

On évalue maintenant $\nabla(1-\chi)\hat{\omega}$. On a

$$\begin{aligned}\psi(1-\chi)\theta\nabla\hat{\omega} &= i\tau\psi(1-\chi)\hat{f}+\psi(1-\chi)\partial_x^\alpha\hat{g}_\alpha\\ &= \psi\nabla((1-\chi)\hat{\omega})+\psi[1-\chi,\theta]\nabla\hat{\omega}\ .\end{aligned}$$

Donc

$$\psi\nabla((1-\chi)\hat{\omega}) = i\tau\psi(1-\chi)\hat{f}+\psi(1-\chi)\partial_x^\alpha\hat{g}_\alpha-\psi[1-\chi,\theta]\nabla\hat{\omega}\ .$$

On a $\psi[1-\chi,\theta]h\nabla\in h^N E^{-\infty}$ pour tout $N\in\mathbb{N}$. Pour N assez grand et pour $h=\lambda(\tau)^{-1/2}$, on a ainsi les trois assertions

$$(i)\qquad \psi[1-\chi,\theta]\nabla\hat{\omega}\in L^2_{\tau,x}$$

$$(ii)\qquad i\tau\psi(1-\chi)\hat{f}\in L^2_\tau(H_x^{-2})\ \text{car}\ 0\leq|\tau|(1-\chi(h\xi))\leq\lambda(\xi)^2$$

$$(iii)\qquad \psi(1-\chi)\partial_x^\alpha\hat{g}_\alpha\in L^2_\tau(H_x^{-2})\ .$$

donc $\nabla((1-\chi)\hat{\omega})\in L^2_\tau(H_x^{-2}(V))$. En appliquant l'inégalité de Poincaré stationnaire, on en déduit que pour presque tout τ, il existe $C_2(\tau)\in\mathbb{R}$, il existe $q_2(\tau,.)\in H^{-1}(V)$ tels que

$$(1-\chi)\hat{\omega}(\tau,.)=C_2(\tau)+q_2(\tau,.) \tag{3.2}$$

avec

$$\forall U'\ \text{ouvert}, \bar{U}'\subset V,\quad |q_2(\tau,.)|_{H^{-1}(U')}\leq c_0'|\nabla(1-\chi)\hat{\omega}(\tau)|_{H^{-2}(V)}$$

donc $q_2\in L^2(\mathbb{R},H^{-1}_{\text{loc}}(V))$. Finalement, grâce à (3.1) et (3.2), on peut écrire sur un voisinage de U

$$\begin{aligned}\hat{\omega} &= \chi(D)\hat{\omega}+(1-\chi(D))\hat{\omega}\\ &= C_1(\tau)+C_2(\tau)+q_1+q_2\end{aligned}$$

avec $q_1\in\lambda(\tau)L^2_\tau(H^1_x)$ et $q_2\in L^2_\tau(H_x^{-1})$.
On introduit $\pi_2=\mathcal{F}_t^{-1}(q_2)$, et $\tilde{\pi}_1=\mathcal{F}_t^{-1}(\frac{q_1}{\lambda(\tau)})$.
On a $\pi_2\in L^2(\mathbb{R};H_x^{-1})$, $\tilde{\pi}_1\in L^2(\mathbb{R},H^1_x)$ et, en notant $D_t=\frac{1}{i}\partial_t$, on obtient

$$q_1=\lambda(\tau)\mathcal{F}_t(\tilde{\pi}_1)=\mathcal{F}_t(\lambda(D_t)\tilde{\pi}_1).$$

Comme $\lambda(D_t)\tilde{\pi}_1 \in H_t^{-1}(H_x^1)$, on a

$$\pi = \pi_2 + \lambda(D_t)\tilde{\pi}_1 \in L^2(H_x^{-1}) + H^{-1}(H_x^1) \ .$$

Comme $\hat{\omega} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ et $q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}, H^{-1}(U))$, on a pour $\psi_0 \in C_0^\infty(U)$ avec $\int_U \psi_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\tau) \ &= C_1(\tau) + C_2(\tau) \\ &= \langle \hat{\omega}(\tau), \psi_0 \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} - \langle q_1(\tau) + q_2(\tau), \psi_0 \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

donc $\tilde{c}(\tau) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ On en déduit que $c(t) = \mathcal{F}_t^{-1}(\tilde{c}(\tau)) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\varphi p = c(t) + \pi = p$ sur un voisinage de $U \times (-\rho_0, \rho_0)$, ce qui termine la preuve de la proposition 3.1.

Proposition 3.2 *On se place sous les hypothèses de la proposition 3.1. Soit $\rho_0 > 0$ et U un ouvert d'adhérence contenue dans Ω. Soit $Q_0 = U \times (-\rho_0, \rho_0)$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Q, vérifiant $\mathcal{O} \cap Q_0 \neq \phi$ et $\mathcal{O}_t = \{x, (x,t) \in \mathcal{O}\}$ connexe pour tout $t \in (-\rho_0, \rho_0)$.*
On suppose que $Q_0 \subset \mathcal{C}(\mathcal{O})$ et que $\nabla p = 0$ dans $\mathcal{O}$.
Alors il existe $c \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il existe $\pi \in H^{-1}(\mathbb{R}, H^1(U)) + L^2(\mathbb{R}, H^{-1}(U))$ tels que

$$\begin{cases} p = c(t) + \pi(x,t) \ \textit{sur } Q_0 \\ \pi = 0 \ \textit{dans } Q_0 \cap \mathcal{O} \ . \end{cases}$$

Démonstration : D'après la proposition 3.1, quitte à diminuer T et Ω, on peut supposer $p = c(t) + \pi(x,t)$ sur Q avec $\pi \in H^{-1}(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) + L^2(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$. On a $p = p_0(t)$ dans $\mathcal{O}$ donc $\pi(x,t) = p_0(t) - c(t) = \pi_0(t)$ dans $\mathcal{O}$. Si $t \in (-\rho_0, \rho_0)$, il existe $x \in U$, $(x,t) \in \mathcal{O}$ donc $\pi_0(t)$ est définie sur $(-\rho_0, \rho_0)$. Comme $\pi \in H^{-1}(\mathbb{R}, H^1(\Omega)) + L^2(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$, on a $\pi_0 \in H^{-1}(-\rho_0, \rho_0)$. Soit $\tilde{\pi}_0$ un prolongement de π_0 dans $H^{-1}(\mathbb{R})$. On a $\tilde{\pi}_0 \in X(U)$ et $p = c(t) + \tilde{\pi}_0(t) + \pi - \tilde{\pi}_0(t)$ avec $\pi - \tilde{\pi}_0 = 0$ dans $Q_0 \cap \mathcal{O}$ et $\pi - \tilde{\pi}_0 \in H^{-1}(\mathbb{R}, H^1(U)) + L^2(\mathbb{R}, H^{-1}(U))$.

4 Inégalité de Carleman pour le noyau de la chaleur.

Dans cette section, nous utilisons exclusivement le calcul défini en 2.2. Nous notons $\wedge$ désigne la transformée de Fourier totale et $\wedge_x$ désigne la transformée de Fourier en x.

Si $g(x,t) \in L^2_t(\mathbb{R}, H^1_x(\mathbb{R}^d))$, on a $\lambda(\xi)\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$. L'opérateur de $L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$ dans $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par

$$\lambda(D_x)g(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\lambda(h\xi)\hat{g}^x(t,\xi)dx$$

est un isomorphisme de $L^2(H^1)$ sur $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ et $(\lambda(D_x))^{-1} = \lambda^{-1}(D_x)$ où

$$\lambda^{-1}(D_x)f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi}\lambda^{-1}(h\xi)\hat{f}^x(t,\xi)d\xi$$

pour $f \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.
Enfin, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, on note

$$\mathbb{P} = h^2 e^{\varphi/h} \circ (\partial_t - \Delta) \circ e^{-\varphi/h} \in E^2$$

Proposition 4.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^{d+1}$ et K un compact de U. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ telle que*
(i) $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur U,
(ii) $\exists c_0 > 0 \quad \forall (x,t) \in U \quad \forall (\xi,\tau)$,

$$\mathrm{Re}\sigma(\mathbb{P}(\xi,\tau) = 0 \Rightarrow \{\mathrm{Re}\sigma(\mathbb{P}), \mathrm{Im}\sigma(\mathbb{P})\}_{\xi,x}(\xi,\tau) \geq c_0$$

Alors il existe $c > 0$, il existe $h_K > 0$, tels que pour tout z, g_j $(0 \leq j \leq d)$, vérifiant

$$\begin{cases} \mathbb{P}(z) = g_0 + h\sum_{1\leq j\leq d} \partial_j g_j, \\ z \in L^2(\mathbb{R}^{d+1}), \mathrm{supp}\ z \subset K, \\ g_j \in X^K(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

on ait pour tout $h \in]0, h_0[$,

$$\sqrt{h}||z||_0 \leq c \sum_{0\leq j\leq d} ||g_j||_{X,h}$$

Remarques :
(i) Les inégalités usuelles ([1],[2],[7]) concernant le noyau de la chaleur supposent g_α dans $L^2_{x,t}$ et s'énonce

$$\sqrt{h}||z||_0 \leq c||g_j||_0.$$

Il est clair que $L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \subset X(\mathbb{R}^d)$ et que $|| \quad ||_{X,h} \leq || \quad ||_0$ donc la proposition 4.1 est plus précise.

(ii) Dans la proposition 4.1 et pour les termes correspondants à des fonctions g_j dans $L^2_{x,t}$, on peut remplacer l'opérateur $h\partial_j$ par tout opérateur de E^1. Il semble que ce ne soit pas le cas pour les termes g_j qui ne sont pas L^2. Pour ces derniers, en suivant la démonstration, on remarque que l'on peut remplacer $h\partial_j$ par tout opérateur d'ordre 1 dont le symbole est un polynôme en ξ de degré un.

Démonstration : On a $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + hE^0$ où $\mathbf{P}_0$ a pour symbole $P_0(x,t,\xi,\tau) = |\xi|^2 - |\nabla\varphi|^2 + i[\tau + 2\nabla\varphi\xi]$.
Soit $V_0 = \{(\xi,\tau), |\xi|^2 + |\tau| \geq 1 + 12|\nabla\varphi|^2_\infty\}$ et $R_0 = 1 + 12|\nabla\varphi|^2_\infty$. Sur V_0 on a

$$\begin{aligned} |P_0(\xi,\tau)| &\geq \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\tau + 2\nabla\varphi\xi| + |\xi|^2 - |\nabla\varphi|^2) \\ &\geq \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\tau| + \tfrac{|\xi|^2}{2} - 3|\nabla\varphi|^2_\infty) \\ &\geq C^{te}\Lambda(\xi,\tau)^2 \end{aligned}$$

Appliquant la propriété 2.2 du §2.2, il existe $e \in E^{-2}$, il existe $\exists\alpha \in E^{-\infty}$ avec $\alpha = 0$ sur $|\xi|^2 + |\tau| \geq R_0$, et il existe $\exists R \in E^0$ tels que

$$e \circ \mathbf{P}_0 = 1 + \alpha + hR.$$

Soit $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}), \rho = \rho(\xi,\tau)$ et $\rho = 1$ sur $|\xi|^2 + |\tau| \leq R_0$. On pose $z_0 = (1-\rho)(z)$. On a

$$\mathbf{P}_0((1-\rho)(z)) = (1-\rho)\mathbf{P}_0(z) + [\mathbf{P}_0, 1-\rho](z)$$

avec $[\mathbf{P}_0, 1-\rho] \in hE^{-\infty}$ et

$$\mathbf{P}_0(z) = g_0 + D_j g_j + hR_1(z),$$

avec $R_1 \in E^0$ donc

$$\begin{aligned} e \circ \mathbf{P}_0(z_0) &= z_0 + \alpha(z_0) + hR(z_0) \\ &= e \circ (1-\rho) \circ [g_0 + D_j g_j + hR_1(z)] + e \circ [\mathbf{P}_0, 1-\rho] z \end{aligned}$$

On en déduit

$$(4.1) \qquad ||z_0||_0 \leq C\Big[||\alpha(z_0)||_0 + ||e(1-\rho)[g_0 + D_j g_j]||_0 + h||z||_0 + h||z_0||_0\Big]$$

Or on a
- $\alpha(z_0) = \alpha \circ (1-\rho)(z)$ et comme $\alpha(1-\rho) = 0$, cela implique $\alpha \circ (1-\rho) \in hE^0$

d'où

$$(4.2) \qquad ||\alpha(z_0)||_0 \leq ch||z||_0$$

• Si $g \in X^K$, alors $\tilde{g} = \lambda(D_x)\Lambda^{-2}(D_x, D_t)g \in L^2$ et

$$(4.3) \qquad ||g||_{X,h} = ||\tilde{g}||_0$$

• On a aussi

$$e \circ (1-\rho)(g_0) = e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2(D_x, D_t) \circ \lambda^{-1}(D_x) \circ \lambda(D_x) \circ \Lambda^{-2}(D_x, D_t)(g_0).$$

Soit $\tilde{g}_0 = \lambda(D_x)\Lambda^{-2}(D_x, D_t)(g_0)$. Comme $g_0 \in X^K$, on a $\tilde{g}_0 \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ donc $\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}_0 \in L^2_t(H^1_x)$.
D'autre part, $e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2(D_x, D_t) \in E^0$, donc

$$e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2(D_x, D_t) \circ \lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}_0 \in L^2_{x,t},$$

et

$$\begin{aligned} ||e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2 \circ \lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}_0||_0 &\leq c||\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}_0||_0 \\ &\leq c||\tilde{g}_0||_0 \end{aligned}$$

donc ($||\tilde{g}_0||_0 = ||g_0||_{X,h}$)

$$(4.4) \qquad ||e \circ (1-\rho)(g_0)||_0 \leq c||g_0||_{X,h}$$

• Enfin on a (on note $D_j = D$ et $g_j = g$)

$$e \circ (1-\rho) \circ Dg = e \circ (1-\rho) \circ D \circ \Lambda^2(D_x, D_t) \circ \lambda(D_x)^{-1} \circ \lambda(D_x) \circ \Lambda^{-2}(D_x, D_t)g$$

Soit $\tilde{g} = \lambda(D_x) \circ \Lambda^{-2}(D_x, D_t)g$. On a $\widetilde{g} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ et $\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$.
Comme D est un polynome d'ordre 1 en ξ, on a $D \in S^1$ et $D \circ \Lambda^2 = \Lambda^2 \circ D$ ($[D, \Lambda^2] = 0$) donc

$$e \circ (1-\rho) \circ D(g) = e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2(D \circ \lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}).$$

On a $D(\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}) \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ car $\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g} \in L^2_t(H^1_x)$ et $e \circ (1-\rho) \circ \Lambda^2 \in E^0$ donc

$$\begin{aligned} ||e(1-\rho)D(g)||_0 &\leq c||D(\lambda^{-1}(D_x)\tilde{g}||_0 \\ &\leq c||\tilde{g}||_0, \end{aligned}$$

d'où

$$\|e \circ (1-\rho) \circ D(g)\|_0 \leq C\|g\|_{X,h} \tag{4.5}$$

De (4.1),...,(4.5), on déduit, pour h petit,

$$\|(1-\rho)z\|_0 \leq c[\|g_j\|_{X,h} + h\|z\|_0]. \tag{4.6}$$

On évalue maintenant $z_1 = \rho(D_x, D_t)z \in C^\infty_{x,t}$. On a $[\mathbf{P}_0, \rho] \in hE^{-\infty}$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0(z_1) = \mathbf{P}_0(\rho(z)) \quad &= \rho \circ \mathbf{P}_0(z) + [\mathbf{P}_0, \rho](z), \\ &= \rho[D_j g_j + g_0] + [\mathbf{P}_0, \rho](z) \end{aligned}$$

Pour $G \in X$, on a $\lambda(D_x)G \in \mathcal{H}^{-2}$,et pour $a \in E^{-\infty}$, on a $a\lambda^{-1} \in E^{-\infty}$, d'où

$$\|a(G)\|_0 \leq c\|\lambda(D_x)G\|_{-2} = c\|G\|_{X,h}$$

Pour $a \in \{\rho \circ D_j, \rho\}$ et $G \in \{g_j, 1 \leq j \leq d\}$, on en déduit

$$\|\mathbf{P}_0(z_1)\|_0 \leq c[\|g_j\|_{X,h} + h\|z\|_0] \tag{4.7}$$

On a $\mathbf{P}_0 = \mathbf{R} + i\mathbf{I}$ et

$$\|\mathbf{P}_0(z_1)\|_0^2 = \|\mathbf{R}(z_1)\|_0^2 + \|\mathbf{I}(z_1)\|_0^2 + i([\mathbf{R}, \mathbf{I}]z_1, z_1) \tag{4.8}$$

Nous avons vu en 2.2 que l'on a

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}, \mathbf{I}] \quad &= [R_0, I_0] + h^2 E^1 \\ &= \tfrac{h}{i}\{R_0, I_0\}_{\xi,x}(D_x, D_t) + h^2 E^1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Nous allons utiliser le

Lemme 4.1 *Sous les hypothèses de la proposition 4.1, il existe des constantes $d', d'' > 0$ telles que pour tout (ξ, τ), on ait*

$$d''\Lambda^{-2}(\xi,\tau)I_0^2(\xi,\tau) + d'\Lambda^{-2}(\xi,\tau)R_0^2(\xi,\tau) + \{R_0, I_0\}_{\xi,x} \geq c_0\Lambda^2.$$

Démonstration du lemme :
• cas (τ, ξ) borné : d'après (ii) de la proposition 4.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|R_0| \leq \varepsilon$, on ait $\{R_0, I_0\}_{\xi,x} \geq \frac{c_0}{2} \geq c\Lambda(\xi,\tau)^2$ et si $|R_0| \geq \varepsilon$, pour d' grand,

$$\begin{aligned} d'\Lambda^{-2}R_0^2 + \{R_0, I_0\}_{\xi,x} \quad &\geq c > 0 \\ &\geq c\Lambda^2(\xi,\tau) \end{aligned}$$

• cas (ξ,τ) non borné.
si $|\xi|^2 \geq |\tau|$ alors on peut supposer $|R_0| \geq 1/2|\xi|^2$. On a $\Lambda \sim |\xi|$ et $|\{R_0, I_0\}_{\xi,x}| \leq M_0|\xi|^2$, d'où pour d' grand

$$d'\Lambda^{-2}R_0^2 + \{R_0, I_0\}_{\xi,x} \geq c\Lambda^2$$

si $|\xi|^2 \leq |\tau|$ et $|\tau|$ grand on a $\Lambda \sim |\tau|^{1/2}$, d'où pour d'' grand

$$\{R_0, I_0\}_{\xi,x} + d''\Lambda^{-2}I_0^2 \geq C\Lambda^2$$

ce qui termine la démonstration du lemme 4.1.

Pour pouvoir utiliser le lemme, on considère une fonction $\beta \in C_0^\infty(U)$, avec $\beta = 1$ sur K. On a $z = \beta z$ et $z_1 = \rho(z) = \beta\rho(z) + [\rho, \beta](z) = \beta z_1 + [\rho, \beta](z)$ avec $[\rho, \beta] \in hE^{-\infty}$.
En appliquant le lemme 4.1 et la propriété 2.1 à la fonction βz_1 et à l'opérateur $d''\Lambda^{-1}I_0^2\Lambda^{-1} + d'\Lambda^{-1}R_0^2\Lambda^{-1} + \frac{i}{h}[R_0, I_0]$, on obtient pour h petit

$$\frac{i}{h}([R_0, I_0](\beta z_1), \beta z_1) \geq c||\beta z_1||_{1,h}^2 - d''||\Lambda^{-1}I_0(\beta z_1)||_0^2 - d'||\Lambda^{-1}R_0(\beta z_1)||_0^2.$$

D'après (4.9) on obtient pour h petit
(4.10)

$$\begin{aligned} i([\mathbb{R}, \mathbb{I}](\beta z_1), (\beta z_1)) &\geq ch||\beta z_1||_{1,h}^2 - hd''||\Lambda^{-1}I_0(\beta z_1)||_0^2 \\ &\quad -d'h||\Lambda^{-1}R_0(\beta z_1)||_0^2 - h^2(R_1(\beta z_1), (\beta z_1)) \\ &\geq c[h||\beta z_1||_{1,h}^2 - hd''||\mathbb{I}(\beta z_1)||_0^2 - hd'||\mathbb{R}(\beta z_1)||_0^2]. \end{aligned}$$

Utilisant $z_1 = \beta z_1 + hE^{-\infty}(z)$, on déduit de (4.8) et (4.10) que pour h petit, on a

$$||\mathbb{P}_0(z_1)||_0^2 \geq c[h||z_1||_0^2 - h^2||z||_0^2] \ . \tag{4.11}$$

De (4.11) et (4.7), on déduit pour h petit

$$||z_1||_0 = ||\rho(z)||_0 \leq \frac{c}{\sqrt{h}}[||g_j||_{X,h} + h||z||_0] \tag{4.12}$$

De (4.6), (4.12) et $z = (1-\rho)z + \rho(z)$, on déduit la proposition 4.1.

5 Inégalité de Carleman dans les espaces X^K

Nous établissons ici, l'inégalité qui permettra de traiter les termes de pression. Les deux calculs définis en 2.1 et 2.2 seront utilisés. Toutes les opérations concernant le calcul 2.1 seront indicées par ξ : dans ce calcul, le temps joue le rôle d'un paramètre. On note L_i des polynômes de degré i en ξ, éléments de E^i_ξ indépendants de τ.

Proposition 5.1 *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, K un compact de U et $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ vérifiant 2.1. Il existe $\rho_0 > 0$, $h_0 > 0$, $c_0 > 0$ tels que, pour tout $q, g_\alpha, |\alpha| \leq 2$ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(t)q = \sum\limits_{|\alpha|\leq 2} (h\partial_x)^\alpha g_\alpha \\ q, g_\alpha \in X(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp}(q, g_\alpha) \subset K \times [-\rho_0, \rho_0] \end{array} \right. \tag{5.1}$$

on ait pour tout $h \in]0, h_0]$

$$h^{1/2} \|q\|_{X,h} \leq c_0 \sum_{|\alpha|\leq 2} \|g_\alpha\|_{X,h} \tag{5.2}$$

Preuve : On note $J = J_h$ l'opérateur

$$\begin{aligned} Jf(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int e^{i(x\xi + t\tau)} \frac{\lambda(h\xi)}{\Lambda^2(h\xi, h^2\tau)} \hat{f}(\xi,\tau) d\tau d\xi \\ &= \lambda(D_x)\Lambda^{-2}(D_x, D_t) f = \Lambda^{-2}(D_x, D_t)\lambda(D_x) f \end{aligned} \tag{5.3}$$

Par définition de $\| \ \|_{X,h}$ on a

$$\|f\|_{X,h} = |Jf|_0 = \|Jf; L^2(\mathbb{R}^{d+1})\| \tag{5.4}$$

Soit K_1 un compact de U vérifiant $K \Subset K_1$.
D'après la proposition 2.1, il existe $\rho_1 > 0$, $h_1 > 0$, $c_1 > 0$ tels que pour tout u, f_α dans $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ à support dans $K_1 \times [-\rho_1, \rho_1]$ vérifiant

$$\mathcal{P}(t)u = \sum_{|\alpha|\leq 2} (h\partial_x)^\alpha f_\alpha \tag{5.5}$$

on ait pour tout $h \in]0, h_1]$

$$h^{1/2}|u|_0 \leq c_1 \sum_{|\alpha|\leq 2} |f_\alpha|_0 \tag{5.6}$$

Soit $\psi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ à support dans $\overset{\circ}{K}_1 \times]-\rho_1, \rho_1[$, égal à 1 au voisinage de $K \times [-\rho_0, \rho_0]$, avec $\rho_0 = \rho_1/2$, Posons

$$u = \psi^2 Jq \tag{5.7}$$

On a $u \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$, support $(u) \subset K_1 \times [-\rho_1, \rho_1]$ et

$$\mathcal{P}(t)u = [\mathcal{P}(t)\psi, \psi J]q + \psi J \sum_{|\alpha| \le 2} (h\partial_x)^\alpha g_\alpha \tag{5.8}$$

On a $[J, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ et $\psi (h\partial_x)^\alpha = \sum\limits_{\beta \le \alpha} (h\partial_x)^\beta \psi_{\beta,\alpha}$,

avec $\psi_{\beta,\alpha} \in C_0^\infty(\overset{\circ}{K}_1 \times]-\rho_1, \rho_1[)$, d'où

(5.9)

$$\begin{cases} \psi J \sum\limits_{|\alpha| \le 2} (h\partial_x)^\alpha g_\alpha = \sum\limits_{|\alpha| \le 2} (h\partial_x)^\alpha f_\alpha \\ f_\alpha \in L^2 \ ; \ \text{support } (f_\alpha) \subset K_1 \times [-\rho_1, \rho_1] \ ; \sum\limits_\alpha |f_\alpha|_0 \le C^{te} \sum\limits_\alpha \|g_\alpha\|_{X,h} \end{cases}$$

où C^{te} désigne une constante indépendante de h. Le lemme 5 sera donc conséquence de (5.6) et (5.8) si nous vérifions qu'il existe $h_2 > 0$, $c_2 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_2]$ on ait

$$\|q\|_{X,h} \le c_2 |\psi J q|_0 \tag{5.10}$$

$$[\mathcal{P}(t)\psi, \psi J] = h \sum_{|\beta| \le 2} (h\partial_x)^\beta \theta_\beta A_\beta J \tag{5.11}$$

où $\theta_\beta(x,t) \in C_0^\infty(\overset{0}{K}_1 \times]-\rho_1, \rho_1[)$ et où les opérateurs A_β sont tels que

$$\sup_{0 < h \le h_2} \|A_\beta \ ; L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \to L^2(\mathbb{R}^{d+1})\| \le C_2 \tag{5.12}$$

Les deux propriétés (5.10) et (5.11) sont conséquences du lemme de commutation suivant :

Lemme 5.1 *Soit $a(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$. On a*

$$[J, a] = hBJ \tag{5.13}$$

où l'opérateur B vérifie

(5.14) $$\sup_{0<h\leq 1} \|B\ ; L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \to L^2(\mathbb{R}^{d+1})\| < +\infty$$

En effet, si on choisit $\theta(x,t) \in C_0^\infty$, $\theta \equiv 1$ au voisinage de $K \times [-\rho_0, \rho_0]$, avec support $(\theta) \Subset \psi = 1$, on a

(5.15) $$Jq = J\theta q = \psi J\theta q + (1-\psi)J\theta q = \psi Jq + (1-\psi)[J,\theta]J^{-1}Jq$$

d'où

(5.16) $$\|q\|_{X,h} = |Jq|_0 \leq |\psi Jq|_0 + C^h h|Jq|_0$$

ce qui prouve (5.10).

De plus, $[\mathcal{P}(t)\psi\ ,\ \psi J]$ est combinaison linéaire de termes de la forme $[(h\partial_x)^\beta a\ ,\ \psi J]$ avec $a \in C_0^\infty(\overset{0}{K}_1 \times]-\rho_1, \rho_1[)$ et $|\beta| \leq 2$ et on a

(5.17) $$[(h\partial_x)^\beta a\ ,\ \psi J] = [(h\partial_x)^\beta a, \psi]J + \psi(h\partial_x)^\beta [a, J]$$

donc (5.11) est à nouveau conséquence du lemme 5.2.

Preuve du lemme 5.1 : Soit $j(\xi,\tau) = \frac{\lambda(\xi)}{\Lambda^2(\xi,\tau)}$. On a

$$[j, a] = ja - aj = \lambda[\Lambda^{-2}, a] - [a, \lambda]\Lambda^{-2}.$$

L'opérateur $B = h^{-1}[J, a]J^{-1}$ est donné par

$$B = h^{-1}\big(\lambda\Lambda^{-1}\Lambda[\Lambda^{-2}, a]\Lambda^2 - [a, \lambda]\big)\lambda^{-1}.$$

Le lemme 5.2 découle directement des faits suivants : - les opérateurs λ^{-1} et $\lambda\Lambda^{-1}$ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$. - l'opérateur $\Lambda[\Lambda^{-2}, a]\Lambda^2$ est dans hE^0, et les opérateurs de E^0 sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.

- l'opérateur $[a, \lambda]$ est dans hE^0_ξ et les opérateurs de E^0_ξ sont bornés sur $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$.

6 Unicité pour le problème de Stokes

Nous démontrons ici le théorème 1. Suivant la démarche de [1], il suffit de montrer le

Lemme 6.1 *Soit* $\Omega = [|x| < 1]$ *et* $Q = \Omega \times (-1,1)$. *Soit* L_1 *un opérateur différentiel d'ordre 1 par rapport aux variables d'espace. Il existe une constante* $M > 0$, *telle que*

$$\forall (u, a, \pi) \in L^2_{\text{loc}}(Q)^3 \times L^\infty(Q) \times \mathcal{D}'(Q)$$

vérifiant

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + L_1(\partial_x)(au) = \nabla \pi \ \textit{dans } Q \\ \text{div } u = 0 \ \textit{dans } Q \\ u = 0 \ \textit{dans } x_n + M(|x'| + |t|) < 0 \\ |a|_{L^\infty(Q)} \leq M \end{cases}$$

On a $u \equiv 0$ *dans un voisinage de* $(0,0)$.

Démonstration : Soit U un voisinage de 0 dans Ω, $\rho_0 > 0$. D'après la proposition 3.1 et la propriété 2.3 (ii), on peut supposer que $\pi \in X(U)$. D'après la proposition 3.2, comme $C([x_n + M(|x'| + |t|) < 0]) = Q$, on peut supposer que $\pi = 0$ dans $(x_n + M(|x'| + |t|) < 0)) \cap Q_0$ où $Q_0 = U \times (-\rho_0, \rho_0)$ et $\pi \in X(U)$.
Soit $B(r)$ la boule centrée en 0 de rayon r dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Soit $\xi = 1$ sur $B(r/2), \xi \in C_0^\infty(B(r))$. On choisit U, ρ_0, r de telle sorte que $\overline{B(r)} \subset U \times (-\rho_0, \rho_0)$. D'après la propriété 2.3, (i),on a $\xi\pi \in X(U)$. On note $p = \xi\pi$, $y = \xi u$, et pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}), q = pe^{\varphi/h}$ et $z = ye^{\varphi/h}$. Si $\gamma_0 \in C_0^\infty(Q_0), \gamma_0 = 1$ sur $B(r)$, $q = \gamma_0 q = p(\gamma_0 e^{\varphi/h})$ donc $q \in X(U)$.
On a

$$(\partial_t - \Delta)y = \xi' u - \Delta\xi u - 2\partial_i(\partial_i \xi u) + \nabla p - (\nabla\xi)\pi - L_1(\partial)(ay) + auL_1(\partial)\xi$$

$$\begin{aligned} h^2 e^{\varphi/h}(\partial_t - \Delta)y \ &= \mathbb{P}_\varphi z \\ &= h^2 e^{\varphi/h}(\xi' u - \Delta\xi u + auL_1(\partial)\xi) \\ &\quad + h^2\nabla q - h(\nabla\varphi)q - h^2(\nabla\xi)\pi e^{\varphi/h} \\ &\quad - h^2 L_1(\partial)(az) + h(L_1(\partial)\varphi)az \\ &\quad - 2h^2\partial_i(\partial_i\xi u e^{\varphi/h}) + 2h\partial_i\varphi\partial_i\xi u e^{\varphi/h} \end{aligned}$$

On choisit $\varphi(x,t) = (x_n + |x'|^2 + |t|^2 - \delta)^2, \delta > 0$ sur un voisinage de l'origine. On a montré dans [1] que φ vérifie les hypothèses des propositions 4.1 et 5.1 et (2.1) pour de bons choix de δ et$r$ (r petit devant δ).

De plus $\mathbb{P}_\varphi z$ est de la forme $\sum_{1 \leq j \leq d} h\partial_j g_j + g_0$ avec

$$\begin{aligned} g_0 = h^2 e^{\varphi/h}(\xi' u - \Delta\xi u + \ & auL_1(\partial)\xi) - h\nabla\varphi q - h^2\nabla\xi\pi e^{\varphi/h} \\ & + h(L_1(\partial)\varphi)(az) + 2h\partial_i\varphi\partial_i\xi u e^{\varphi/h}. \end{aligned}$$

Pour les termes qui sont dans $L^2_{x,t}$, on utilise l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in X(\mathbb{R}^d) \\ ||f||_{X,h} \leq ||f||_0 \end{array} \right.$$

En appliquant la proposition 4.1, il existe $c > 0$, il existe $h_1 > 0$, tel que pour tout $h \in]0, h_1]$, on ait

$$||z||_0^2 \leq C[h||q||^2_{X,h} + h||a||^2_\infty ||z||_0^2 + h||\partial_i \xi u e^{\varphi/h}||_0^2 + \frac{1}{h}||g_0||^2_{X,h}]. \tag{6.2}$$

et

(6.3)

$$||g_0||^2_{X,h} \leq Ch^4[||(\xi' u + \Delta\xi u \quad + auL_1(\partial)\xi + \tfrac{2}{h}\nabla\varphi\nabla\xi u)e^{\varphi/h}||_0^2 \\ + \tfrac{1}{h^2}||a||^2_\infty ||z||_0^2 + \tfrac{1}{h^2}||\nabla\varphi q||^2_{X,h} + ||e^{\varphi/h}\nabla\xi\pi||^2_{X,h}].$$

D'après la proposition 2.4 (eq. (2.4)), il existe $c > 0$, il existe $h_1 > 0$ tels que pour $h \in]0, h_1]$ on ait

$$||\nabla\varphi q||_{X,h} \leq c||q||_{X,h} \; . \tag{6.4}$$

Soit $\gamma \in C_0^\infty(U \times (\rho_0, \rho_0))$, $\gamma = 1$ sur le support de $\partial\xi\pi$. On a $\gamma\nabla\xi\pi = \nabla\xi\pi$ donc, par (2.2) et (2.4),

$$\begin{aligned} ||e^{\varphi/h}\nabla\xi\pi||_{X,h} &\leq c||\gamma e^{\varphi/h}||_{W^{5+d,1}}||\nabla\xi\pi||_{X,h} \\ &\leq \tfrac{c}{h^2}||\gamma e^{\varphi/h}||_{W^{5+d,1}}||\nabla\xi\pi||_{X,1}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

De (6.2),...,(6.5), on déduit pour h assez petit,

$$||z||_0^2 \leq c\left[h||q||^2_{X,h} + \frac{1}{h^2}||\gamma e^{\varphi/h}||^2_{W^{5+d,1}}||\nabla\xi\pi||^2_{X,1} + ||fe^{\varphi/h}||_0^2\right] \tag{6.6}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f = |\nabla\xi||u| + |\Delta\xi u| + |auL_1(\partial)\xi| + 2|\nabla\varphi\nabla\xi u| \in L^2_{x,t} \\ f \text{ ne dépend pas de } h \\ \text{supp} f \subset \Sigma \text{ où } \Sigma = [x_n + M(|x'| + |t|) \geq 0] \cap [|(x,t)| \geq \frac{r}{2}] \cap B(r) \end{array} \right. \tag{6.7}$$

On évalue maintenant $||q||_{X,h}$. D'après (6.1), on a $\Delta\pi = \text{div}L_1(\partial)(au)$. De plus $\Delta p = \Delta\xi\pi + 2\partial_i(\partial_i\xi\pi) + \xi L_2(\partial)(au)$ où l'on note $L_2(\partial) = \text{div}L_1(\partial)$. L_2 est polynomial en ∂ donc

$$\xi L_2(\partial)(au) = L_2(\partial)(\xi au) + L_1(\partial)(auL_1(\partial)\xi) + auL_2(\partial)(\xi)$$

où $L_1(\partial)$ est d'ordre 1 .
On a donc

$$\Delta p = \Delta\xi\pi + 2\partial_i(\partial_i\xi\pi) + L_2(\partial)(ay) + L_1(\partial)(auL_1(\partial)\xi) + auL_2(\partial)(\xi),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} h^2 e^{\varphi/h} \circ \Delta \circ e^{-\varphi/h} q &= \mathcal{P}q \\ &= h^2 \Delta\xi\pi e^{\varphi/h} + \mathcal{L}_2(D_x)(az) \\ &+ h\mathcal{L}_1(D_x)(\partial\xi\pi e^{\varphi/h}, au\partial\xi e^{\varphi/h}) \\ &+ h^2 au\ e^{\varphi/h}\partial\xi, \end{aligned}$$

où on a noté $\partial\xi$ tout terme ne comportant que des dérivées de ξ : ces termes sont à support dans $[\frac{r}{2} \leq |x,t| \leq r]$.

En appliquant maintenant la proposition 5.1, on obtient

$$\begin{aligned} \|q\|^2_{X,h} \leq c[\tfrac{1}{h}\|az\|^2_0 & + h\|\partial\xi\pi e^{\varphi/h}\|^2_{X,h} + h\|au\partial\xi e^{\varphi/h}\|^2_0 \\ & + h^3\|\Delta\xi\pi e^{\varphi/h}\|^2_{X,h}. \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.4), il existe $c > 0$, tel que pour $h < h_1$, on ait

$$\|\partial\xi\pi e^{\varphi/h}\|_{X,h} \leq \frac{c}{h^2}\|\gamma e^{\varphi/h}\|_{W^{5+d,1}}\|\partial\xi\pi\|_{X,1}$$

$$\|\Delta\xi\pi e^{\varphi/h}\|_{X,h} \leq \frac{c}{h^2}\|\gamma e^{\varphi/h}\|_{W^{5+d,1}}\|\Delta\xi\pi\|_{X,1}\ .$$

En notant $g = |au\partial\xi| \in L^2$, qui est une fonction indépendante de h, vérifiant supp$g \subset \Sigma$, on a donc pour h petit,

$$\|q\|^2_{X,h} \leq c[\frac{1}{h}\|az\|^2_0 + \frac{1}{h^3}\|\gamma e^{\varphi/h}\|^2_{W^{5+d,1}} + \|ge^{\varphi/h}\|^2_0] \tag{6.8}$$

De (6.6), (6.7), (6.8), on déduit

$$\|z\|^2_0 \leq c\left[\|a\|^2_\infty\|z\|^2_0 + \frac{1}{h^2}\|\gamma e^{\varphi/h}\|^2_{W^{5+d,1}} + \|f_0 e^{\varphi/h}\|^2_0\right]$$

où $f_0 = |f| + |g|$ vérifie (6.7).
Pour $\|a\|_\infty \leq M_0$ et M_0 bien choisi, on a donc pour un N assez grand

$$\|z\|^2_0 \leq C\left[\|f_0 e^{\varphi/h}\|^2_0 + \frac{1}{h^N} sup_{\mathrm{supp}\gamma}(e^{2\varphi/h})\right].$$

Les lignes de niveau de $\varphi = (x_n + |x'|^2 + |t|^2 - \delta)^2$ décroissent avec x_n donc pour M assez petit, on a

$$\bar{\Sigma} \cap [\varphi \geq \varphi(0)] = \emptyset.$$

Ceci montre qu'il existe une fonction γ vérifiant $\gamma = 1$ sur Σ, supp$\gamma \subset [\varphi < \varphi(0)]$, $\gamma \in C^\infty$ et

$$\sup_{\text{supp}\gamma} (e^{\varphi/h}) < e^{\frac{\delta^2 - 2\varepsilon}{h}},$$

pour un $\varepsilon > 0$.
Il en résulte

$$||z||_0^2 \leq \frac{C}{h^N} e^{\frac{2(\delta^2 - 2\varepsilon)}{h}}$$

D'autre part, sur un voisinage V de 0, on a $e^{\varphi/h} \geq e^{\frac{\delta^2 - \varepsilon}{h}}$ d'où $\int_V |u|^2 \leq \frac{C}{h^N} e^{-\frac{2\varepsilon}{h}} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $u = 0$ sur V et le lemme 6.1 est démontré.

7 Régularité de la pression du problème de Stokes

Nous démontrons ici le théorème 1.2. On commence par effectuer quelques réductions élémentaires. Soit $\varphi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$(\partial_t - \Delta)\varphi u = -\nabla(\varphi p) + [\varphi f + \varphi' u] \quad , \text{div } (\varphi u) = 0$$

En remplaçant (u, p, f) par $(\varphi u, \varphi p, \varphi f + \varphi' u)$, on peut supposer u, p, f à support compact en temps.

En effectuant une transformation de Fourier en temps on se ramène alors au problème :

$$(7.1) \qquad \begin{cases} (i\tau - \Delta)\hat{u} = -\nabla \hat{p} + \hat{f} \quad \text{div } (\hat{u}) = 0 \\ \\ \hat{u}(\tau, \bullet) \in L^2(\tau; (H_0^1(\Omega))^3) \quad \hat{f}(\tau, \bullet) \in L^2(\tau; (H^{-1}(\Omega))^3) \end{cases}$$

Pour éviter les surcharges de notation, on notera (u, p, f) les fonctions intervenant dans (7.1).

Le problème (7.1) est stationnaire, et il s'agit d'étudier le comportement de $p(\tau, x)$ pour $\mid \tau \mid$ grand.

On note

$$H^{-1}_{[\bar{\Omega}]} = \{g \in H^{-1}(\mathbb{R}^d);\ \ support(g) \subset \bar{\Omega}\}.$$

On choisit $\underline{f}(\tau, \bullet) \in L^2(\tau; H^{-1}_{[\bar{\Omega}]})$ vérifiant $\underline{f}\big|_{\Omega} = f$, ce qui est possible d'une infinité de manière, et $q \in L^2(\tau, L^2(\mathbb{R}^d))$ vérifiant

$$\Delta q = \text{div } (\underline{f}) \in L^2(\tau, H^{-2}) \text{ au voisinage de } \bar{\Omega}.$$

On a alors

$$(i\tau - \Delta)u = -\nabla(p - q) + (f - \nabla q)$$

En remplaçant (u, p, f) par $(u, p-q, f-\nabla q)$ on peut donc supposer div $(f) = 0$, et (7.1) devient

$$\text{(7.2)} \qquad \begin{cases} (i\tau - \Delta)u = -\nabla p + f \ , \quad \text{div } u = 0 \ , \quad \text{div } f = 0 \\ \\ u \in L^2(\tau; (H^1_0(\Omega))^3) \ , \quad f \in L^2(\tau; H^{-1}(\Omega)^3) \end{cases}$$

C'est le problème (7.2) que l'on va étudier. On a $\Delta p = 0$, et $-\nabla p = (i\tau - \Delta)u - f$ entraine, pour tout intervalle borné I de $\mathbb{R}$, $1_{\tau \in I} p(\tau, x) \in L^2(\tau; L^2(\Omega))$. On en déduit que $p(\tau, x)$ est une distribution prolongeable.

On notera (∂_n est la dérivée normale intérieure)

$$\text{(7.3)} \qquad p_0 = p_{\big|\partial\Omega} \quad p_1 = (\partial_n p)_{\big|\partial\Omega}$$

On a

$$p_0 \in L^2_{\text{loc}}(\tau; H^{-1/2}(\partial\Omega))$$
$$p_1 \in L^2_{\text{loc}}(\tau; H^{-3/2}(\partial\Omega))$$

On va étudier (7.2) pour $\tau \geq 1$ (le cas $\tau \leq -1$ s'obtient par conjugaison et les valeurs de $\tau \in [-1, +1]$ ne contribuent qu'à la composante L^2 de la pression).

Remarque : A ce stade, (7.2) est équivalent à

$$\text{(7.4)} \qquad \begin{cases} i\tau u = -\nabla p + g & (g = f + \Delta u) \\ \\ u \in L^2(\tau, (H^1_0)^3) & g \in L^2(\tau; (H^{-1})^3) \\ \\ \text{div } u = 0 & \text{div } g = 0 \end{cases}$$

Mais (7.2) est plus agréable à étudier, ce qui peut paraitre curieux...

Lemme 7.1 *Il existe* $\underline{f} \in L^2(\tau;(H^{-1}_{[\bar{\Omega}]})^3)$, $q \in L^2(\tau, L^2(\Omega))$ *vérifiant*

$$\underline{f}\Big|_{\Omega} = f + \nabla q, \qquad \text{div } \underline{f} = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta q = 0.$$

Preuve : Soit $\underset{\sim}{f} \in L^2(\tau;(H^{-1}_{[\bar{\Omega}]})^3)$ un prolongement de f, $\underset{\sim}{f}\big|\Omega = f$. On a div $\underset{\sim}{f} \in L^2(\tau, H^{-2})$, et div $\underset{\sim}{f}$ est a support dans $\partial\Omega$. Donc div $\underset{\sim}{f} = a\delta' + b\delta$ où $\langle\delta, \varphi\rangle = \int_{\partial\Omega}\varphi$, $\delta' = \frac{\partial}{\partial n}\delta$, $a \in L^2(\tau, H^{-1/2}(\partial\Omega))$, $b \in L^2(\tau; H^{-3/2}(\Omega))$. Comme $\langle \text{div } \underset{\sim}{f}, 1\rangle = 0$ on a $\int_{\partial\Omega} b = 0$. Il suffit alors de poser

$$\underline{f} = \underset{\sim}{f} - k\delta + 1_{\Omega}\nabla q$$

avec $k \in L^2(\tau; (H^{-1/2}(\partial\Omega))^3), k.\vec{n} = k_{\perp}, k - k.\vec{n} = k_{\shortparallel}$ les composantes normales et tangentielles de k vérifiant $k_{\perp} = a$, $\text{div}_{\shortparallel} k_{\shortparallel} = b + \partial_n q_{\big|\partial\Omega}$, la deuxième équation étant résoluble puisque $\int_{\partial\Omega} b = 0$(div$_{\shortparallel}$ est l'opérateur de divergence sur $\partial\Omega$ munit de la métrique induite). On peut choisir $k_{\shortparallel} = 0$; q est alors solution de $\Delta q = 0$; $\partial_n q_{\big|\partial\Omega} = -b \in L^2(\tau; H^{-3/2}(\Omega))$ ce qui montre le lemme 7.1.

A ce stade, on doit faire un peu de géométrie différentielle pour expliciter les coordonnées de u, ∇p, f près du bord.

On choisit d'abord près de $\partial\Omega$ le système de coordonnées géodésiques normales

$$\begin{array}{ll} \partial\Omega \times [0, r_0] & \longrightarrow \bar{\Omega} \\ (y, x) & \mapsto z \ ; \ x = \text{dist } (z, \partial\Omega) = \text{dist } (z, y) \end{array}$$

Dans ce système de coordonnées, la métrique est

$$(\delta x)^2 + \Sigma g_{i,j}(x, y)(\delta y)_i(\delta y)_j$$

où $g_{ij}(x, y)$ est le tenseur métrique sur l'hypersurface parallèle $\partial\Omega$ à

$$\{z; \text{dist } (z, \partial\Omega) = x\}.$$

On notera Δ_0 le Laplacien sur les fonctions

$$\text{(7.5)} \qquad \Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_x\sqrt{\det g}\partial_x + \sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_{y_i}(\sqrt{\det g} \ \ g^{i,j}\partial_{y_j})$$

où $(g^{i,j})_{i,j}$ est la matrice inverse de $g = (g_{i,j})$.

On décomposera les champs de vecteurs sous la forme

$$u = u_\perp \frac{\partial}{\partial x} + u_{\shortparallel} \ ; \ u_{\shortparallel} = \Sigma u_{\shortparallel,j} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

c'est à dire $u_\perp = u \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, $u_{\shortparallel} = u - u_\perp \frac{\partial}{\partial x}$ et $u = (u_\perp, u_{\shortparallel})$.
Avec ces notations, on a :
• Si p est une fonction, le champ ∇p est

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p = (\frac{\partial p}{\partial x} \ , \ \nabla'' p) \\ \nabla'' p = \Sigma v_j \frac{\partial}{\partial y_j} \quad v_j = \Sigma g^{j,k} \frac{\partial p}{\partial y_k} \end{array} \right. \tag{7.6}$$

• Si $u = (u_\perp, u_{\shortparallel})$ est un champ de vecteurs

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \ \partial_x \sqrt{\det g} u_\perp + \text{div}_{\shortparallel} u_{\shortparallel} \\ \\ u_{\shortparallel} = \Sigma u_j \frac{\partial}{\partial y_j} \quad \text{div}_{\shortparallel}(u_{\shortparallel}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} \sqrt{\det g} \ \ u_j \end{array} \right. \tag{7.7}$$

• Si $u = (u_\perp, u_{\shortparallel})$ est un champ de vecteurs, le laplacien de u, qu'on notera $\Delta_1 u$ est un champ de vecteurs et

$$\Delta_1 \begin{pmatrix} u_\perp \\ u_{\shortparallel} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_0 u_\perp \\ \Delta_{\shortparallel} u_{\shortparallel} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} u_\perp \\ u_{\shortparallel} \end{bmatrix} + M_0 \begin{bmatrix} u_\perp \\ u_{\shortparallel} \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

où Δ_0 est le Laplacien sur les fonctions,

$$\Delta_{\shortparallel} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \ \ \partial_x \sqrt{\det g} \partial_x Id + P_2(x, y, \partial_y) \tag{7.9}$$

(P_2 est une matrice qui ne contient que des dérivées horizontales ∂_{y_j}) et $\sigma(\Delta_{\shortparallel}) = \sigma(\Delta_0) Id$.
M_1 est un opérateur différentiel de degré 1 de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \Sigma M_{1,j}(x, y) \frac{\partial}{\partial y_j} \\ M_{1,j} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array} \right) \end{array} \right. \tag{7.10}$$

et M_0 une matrice (un différentiel de degré 0).

On utilisera le fait que M_1 ne contient pas la dérivée $\frac{\partial}{\partial x}$, et envoie le vecteur normal $\vec{n}$ sur un vecteur horizontal.

Près du bord, on a $p \in \cap\, C^k(x; H^{-1/2-k}(\partial\Omega))$ à τ fixé, donc la distribution

$$1_{x\geq 0}\nabla p$$

est bien définie dans $L^2_{\text{loc}}(\tau; H^{-1})[\langle 1_{x\geq 0}\nabla p, \varphi\rangle = -\int_\Omega p \text{ div } \varphi - \int_{\partial\Omega} p_0\varphi$, pour $\varphi \in (H^1(\mathbb{R}^d))^3]$.

Enfin, on note $\underline{u}$ le prolongement de u par zéro hors de Ω. Comme $u \in L^2(\tau; (H^1_0)^3)$ on a $\underline{u} \in L^2(\tau; (H^1)^3)$ et div $(\underline{u}) = 0$.

D'après le lemme 1, quitte à modifier la pression p par une fonction de $L^2(\tau; L^2(\Omega))$, on peut supposer $f = \underline{f}_{|\Omega}$ avec $\underline{f} \in L^2(\tau; (H^{-1}_{[\bar\Omega]})^3)$ et div $\underline{f} = 0$.

On a alors

$$(i\tau - \Delta_1)\underline{u} = -1_{x\geq 0}\nabla p + \underline{f} + (k_\perp, k_{\shortparallel})\delta \tag{7.11}$$

avec

$$k = (k_\perp, k_{\shortparallel}) \in L^2_{\text{loc}}(\tau; (H^{-1/2}(\partial\Omega))^3). \tag{7.12}$$

En effet, $(i\tau - \Delta)\underline{u} + 1_{x\geq 0}\nabla p - \underline{f}$ est à support dans $\partial\Omega$, et appartient à $L^2_{\text{loc}}(\tau; (H^{-1})^3)$ donc est de la forme $k\delta$ où k vérifie (7.12).

Lemme 7.2 *On a $k_\perp = 0$ et $\text{div}_{\shortparallel} k_{\shortparallel} = +p_1 = \frac{\partial p}{\partial x}\big|_{x=0}$.*

Preuve : D'après (7.7) et $\Delta p = 0$ on a

$$\text{div }(1_{x\geq 0}\nabla p) = p_1\delta$$

$$\text{div }(k\delta) = k_\perp\delta' + \text{div}_{\shortparallel} k_{\shortparallel}\delta.$$

Comme div $\underline{u} =$ div $\underline{f} = 0$, (7.11) entraine

$$p_1\delta = k_\perp\delta' + \text{div}_{\shortparallel} k_{\shortparallel}\delta,$$

ce qui montre le lemme.

Pour obtenir le résultat de régularité sur la pression, on va écrire une équation scalaire pseudodifférentielle en utilisant (7.11), et les identités

$$\underline{u}_{|x=0} = 0\ ;\ k_\perp = 0.$$

Pour ce faire, on introduit les classes de symboles et opérateurs adéquates. Près du bord on notera

$$(z, \zeta) = (x, y; \xi, \eta).$$

L'espace de symbole $\mathcal{A}^m$ est

$$\mathcal{A}^m = \{q(\tau, z, \zeta) \; ; \; | \partial_z^\alpha \partial_\zeta^\beta q | \leq C_{\alpha,\beta} \Lambda^{m-|\beta|}\},$$

où Λ est le poids $\Lambda = (\tau + | \zeta |^2)^{1/2}$.
Les opérateurs étant

$$Op(q)(g)(z) = (2\pi)^{-d} \int e^{iz\zeta} q(\tau, z, \zeta) \hat{g}(\zeta) d\zeta.$$

On notera aussi $Op(q) \in \mathcal{A}^m$ par abus, et $\mathcal{A}_0^m$ la même classe pour les opérateurs sur le bord en remplaçant Λ par $\Lambda_0 = (\tau + | \eta |^2)^{1/2}$. En particulier pour $m \in \mathbb{N}, g \in H^s_{\text{comp}}$, $\varphi \in C_0^\infty$ et $A \in \mathcal{A}^{-m}$ on a des estimations uniformes en $\tau \geq 1$

$$||\varphi A u||_{H^{s+m-j}} \leq C_j \frac{1}{\tau^{j/2}} ||u||_{H^s} \quad 0 \leq j \leq m,$$

de sorte que les opérateurs de degré très négatif gagnent à la fois de la régularité en z, et de la décroissance en τ.

Comme on a d'après (7.2) l'estimation brutale

$$\nabla p \in \tau L^2(\tau; H^{+1}(\Omega)) + L^2(\tau, H^{-1}(\Omega)), \tag{7.13}$$

en modifiant p par une fonction de τ seul (qui ne contribue qu'à la fonction $h(t)$) on peut supposer

$$p_j \in \tau L^2(\tau; H^{+3/2-j}(\partial\Omega)) + L^2(\tau, H^{-1/2-j}) \; , \; j = 0, 1 \; , \tag{7.14}$$

donc aussi d'après (7.11)

$$k \in \tau L^2(\tau; (H^{-1/2}(\partial\Omega))^3). \tag{7.15}$$

L'opérateur $(i\tau - \Delta_1)$ appartient à $\mathcal{A}^2$ et son symbole principal $(i\tau + | \zeta |^2) Id$ est elliptique. On note $E \in \mathcal{A}^{-2}$ une parametrix de $(i\tau - \Delta_1)$, c'est à dire un opérateur de $\mathcal{A}^{-2}$ vérifiant

$$E \circ (i\tau - \Delta_1) = Id + R \; , \; R \in \mathcal{A}^{-\infty}.$$

On note aussi E_0 et $E_{\shortparallel}$ des parametrix pour $(i\tau - \Delta_0), (i\tau - \Delta_{\shortparallel})$ (voir (7.8)). D'après (7.8) et (7.10) on a près du bord $\partial\Omega$

$$\text{(7.16)} \qquad \begin{cases} E = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_{\shortparallel} \end{pmatrix} + \sum_j \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_j} \text{ modulo } \mathcal{A}^{-4} \\ \\ B, C, D \in \mathcal{A}^{-4} \end{cases}$$

Par ailleurs, E admet un développement asymptotique

$$E = e_0 + e_1 + \cdots, e_j \in \mathcal{A}^{-2-j}$$

avec

$$\text{(7.17)} \qquad e_0 = \frac{1}{i\tau + \mid \zeta \mid^2} Id\ ,\ e_j = \sum_{\ell \le j} \frac{e_j^\ell(z,\zeta)}{(i\tau + \mid \zeta \mid^2)^{2\ell+1}}$$

où les $e_j^\ell(z,\zeta)$ sont des matrices polynomiales en ζ de degré au plus $4\ell - j$, indépendantes de τ.

On peut donc utiliser la théorie des problèmes aux limites elliptiques pour calculer les projecteurs de Calderòn

$$\text{(7.18)} \qquad \begin{cases} \Gamma^0(k(y)) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} E(k\delta) \\ \Gamma^1(k(y)) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{x \to 0^-} E(k\delta') \end{cases}$$

et on obtient

$$\text{(7.19)} \qquad \begin{cases} \Gamma^0 & = \begin{pmatrix} \Gamma_0^0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{\shortparallel}^0 \end{pmatrix} + \sum\limits_j \begin{pmatrix} 0 & B^0 \\ C^0 & D^0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_j} \text{ modulo } \mathcal{A}_0^{-3} \\ \Gamma^1 & = \begin{pmatrix} \Gamma_0^1 & 0 \\ 0 & \Gamma_{\shortparallel}^1 \end{pmatrix} + \sum\limits_j \begin{pmatrix} 0 & B^1 \\ C^1 & D^1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_j} \text{ modulo } \mathcal{A}_0^{-2} \end{cases}$$

avec $B^0, C^0, D^0 \in \mathcal{A}_0^{-3}$; $B^1, C^1, D^1 \in \mathcal{A}_0^{-2}$ et

$$\text{(7.20)} \qquad \begin{cases} \Gamma_0^0, \Gamma_{\shortparallel}^0 \in \mathcal{A}_0^{-1} \text{ ; de symbole principal} \\ \\ \sigma(\Gamma_0^0) = \frac{1}{2a} \quad \sigma(\Gamma_{\shortparallel}^0) = \frac{Id}{2a} \end{cases}$$

$$
(7.21) \qquad \begin{cases} \Gamma_0^1, \Gamma_{\shortparallel}^1 \in \mathcal{A}_0^0 \text{ ; de symbole principal} \\ \\ \sigma(\Gamma_0^1) = \frac{1}{2} \quad \sigma(\Gamma_{\shortparallel}^1) = \frac{Id}{2} \end{cases}
$$

avec

$$
(7.22) \qquad a = (i\tau + \|\eta\|^2)^{1/2} \text{ Re } a > 0,
$$

où $\|\eta\|^2 = \Sigma g^{i,j}(y)\eta_i\eta_j$ est le carré de la longueur du vecteur cotangent $\eta \in T_y^*\partial\Omega$. En particulier, Γ^0(resp. Γ^1) est elliptique dans $\mathcal{A}_0^{-1}$(resp $\mathcal{A}_0^0$).

Lemme 7.3 *On a*

$$
E(1_{x\geq 0}\nabla p) \mid_{x=0} = \frac{1}{i\tau}(\Gamma^0(\alpha_1) + \Gamma^1(\alpha_0)) + \ell
$$

(où $\ell \in \tau^{-\infty}C^\infty(\partial\Omega)$ est un reste négligeable) et

$$
(7.23) \qquad \alpha_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ \nabla^{\shortparallel} p_0 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_1 = \begin{pmatrix} -\Delta_{0,\shortparallel} p_0 \\ \nabla^{\shortparallel} p_1 + \Sigma B_j(y)\frac{\partial p_0}{\partial y_j} \end{pmatrix}
$$

où $\Delta_{0,\shortparallel}$ est le Laplacien sur $\partial\Omega$, et les $B_j(y)$ des vecteurs C^∞ en y.

Preuve : A une fonction négligeable près, le champ $\omega = E(1_{x\geq 0}\nabla p)$ vérifie $(i\tau - \Delta_1)\omega = 1_{x\geq 0}\nabla p$. On a donc $\omega = \frac{1}{i\tau}1_{x\geq 0}\nabla p + \gamma$ avec

$$
\begin{aligned}
(i\tau - \Delta_1)\gamma \ &= \tfrac{1}{i\tau}\Delta_1((\nabla p)1_{x\geq 0}) \\
&= \tfrac{1}{i\tau}\Delta_1 \left(\nabla[p1_{x\geq 0}] - \begin{pmatrix} p_0\delta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \tfrac{1}{i\tau}\nabla(\Delta_0(p1_{x\geq 0}) - \tfrac{1}{i\tau}\Delta_1 \begin{pmatrix} p_0\delta \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{1}{i\tau}(\alpha_0\delta' + \alpha_1\delta)
\end{aligned}
$$

où α_0, α_1 sont définis par (7.23) [Pour cette dernière identitée, on utilise les formules (7.6) à (7.10) et le fait qu'on doit trouver 0 quand $p_0 = C^{te}$]. D'où ($\omega \in H^1$ à τ fixé).

$$
\omega_{\big|x=0} = \lim_{x\to 0^-} \omega = \lim_{x\to 0^-} \gamma = \frac{1}{i\tau}(\Gamma^1(\alpha_0) + \Gamma^0(\alpha_1))
$$

par définition des projecteurs de Calderòn, ce qui montre le lemme.

On peut maintenant énoncer le lemme utile.

Lemme 7.4 *L'identité suivante est vraie modulo $\tau^{-\infty}C^{\infty}(\partial\Omega)$:*
(7.24)

$$-\Delta_{0,\shortparallel}p_0+\left[(\Gamma^0)^{-1}\Gamma^1(\alpha_0)\right]_{\textit{1ère composante}}=i\tau\left[(\Gamma^0)^{-1}[E(\underline{f})_{|x=0}]\right]_{\textit{1ère comp.}}$$

Preuve : On a $E((i\tau-\Delta_1)\underline{u})\big|_{x=0}=\underline{u}_{|x=0}+(R\underline{u})_{|x=0}\in\tau^{-\infty}C^{\infty}(\partial\Omega)$, donc $E(1_{x\geq 0}\nabla p)_{|x=0}=E(\underline{f})_{|x=0}+\Gamma^0(k)$, donc $k+(\Gamma^0)^{-1}(E(\underline{f})_{|x=0})=\frac{1}{i\tau}(\alpha_1+(\Gamma^0)^{-1}\Gamma^1(\alpha_0))$ et (7.24) est conséquence de $k_{\perp}=0$.

Proposition 7.1 *Soit p solution de (7.2), normalisé par $\int_{\partial\Omega}p_0=0$. Alors on a $p=r+q$ avec $q\in L^2(\tau;L^2(\Omega))$, $\Delta r=0, r_0=r_{|\partial\Omega}, r_1=\partial_n r_{|\partial\Omega}$ vérifiant*

$$\int_{\partial\Omega}r_0=0$$

$$[\Pi_0-\mid\Delta_{0,\shortparallel}\mid^{1/2}]r_1=i\tau\left[(i\tau-\Delta_0)^{-1}[-\mathrm{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}]\right]_{|x=0} \tag{7.25}$$

où

$$\Pi_0=\sqrt{i\tau-\Delta_{0,\shortparallel}},$$

(les opérateurs $\left|\Delta_{0,\shortparallel}\right|^{1/2}$ et Π_0 sont définis par la théorie spectrale de $\Delta_{0,\shortparallel}$).

Vérifions déjà que la proposition 7.1 entraîne le théorème 1.2.
Soit $g=i\tau\left[(i\tau-\Delta_0)^{-1}[-\mathrm{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}]\right]_{|x=0}$. On a

$$g\in\tau\frac{(1+\mid\Delta_{0,\shortparallel}\mid^{1/2})}{(\tau^{1/2}+\mid\Delta_{0,\shortparallel}\mid^{1/2})^{1/2}}L^2(\tau,L^2(\partial\Omega)). \tag{7.26}$$

En effet, en notant à nouveau $a=(i\tau+\eta^2)^{1/2}$, il s'agit d'un théorème de trace pour un opérateur elliptique : On a pour un $h\in L^2$ $\widehat{\mathrm{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}}=h(\tau,\eta,\xi)(1+\mid\eta\mid+\mid\xi\mid)(1+\mid\eta\mid)$. D'où

$$\left|\int\frac{h(\tau,\eta,\xi)(1+\mid\eta\mid+\mid\xi\mid)(1+\mid\eta\mid)}{i\tau+\eta^2+\xi^2}d\xi\right|\leq\mid h(\tau,\eta,\cdot)\mid_{L^2}(1+\mid\eta\mid)\frac{C^{te}}{\sqrt{\mid a\mid}}.$$

On a d'autre part,

$$\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2} = \frac{i\tau}{\Pi_0 + \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}},$$

d'où

$$\begin{aligned} r_1 &\in (\tau^{1/2} + \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2})^{1/2} (1 + \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid)^{1/2} L^2(\tau, L^2(\partial\Omega)) \\ &= (\tau^{1/2} + \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2})^{1/2} L^2(\tau, H^{-1}(\partial\Omega)). \end{aligned}$$

On peut donc décomposer r_1 en somme de deux termes :
le terme $\tau^{1/4} L^2(\tau, H^{-1}(\partial\Omega))$ fournit une contribution $H^{-1/4}_{\mathrm{loc}}(t, H^{1/2}(\Omega))$ à la pression, tandis que le terme $L^2(\tau, H^{-3/2}(\partial\Omega))$ ne contribue qu'à la partie L^2.

Remarques :

1. On remarquera que la formule (7.25) ne dépend pas du prolongement choisi de la force car si $\underset{\sim}{f}$ est un autre prolongement à div nulle, $\underset{\sim}{f} = \underline{f} + k\delta$ et div $(k\delta) = 0 \Leftrightarrow k_\perp = 0, \mathrm{div}_{\shortparallel} k_{\shortparallel} = 0$ donc $\mathrm{div}_{\shortparallel} \underset{\sim}{f} = \mathrm{div}_{\shortparallel} \underline{f}$. En particulier, si $f \in L^2(\tau, L^2)$ près du bord, la condition div $f = 0$ donne $f_{\perp|\partial\Omega} \in H^{-1/2}$ et on peut choisir comme prolongement à divergence nulle

$$\underline{f} = 1_{x \geq 0} f + 1_{x \geq 0} \nabla q \text{ avec } -\partial q_{\big|\partial\Omega} = f_{\perp\big|\partial\Omega}, \text{ donc } q \in H^1$$

On a alors $\mathrm{div}_{\shortparallel} \underline{f}_{\shortparallel} = 1_{x \geq 0} (\mathrm{div}_{\shortparallel}(f_{\shortparallel} + \nabla_{\shortparallel} q))$.
On trouve donc $g \in \frac{\tau(1+|\eta|)}{|a|^{3/2}} L^2$ d'où $r_1 \in \frac{1+|\eta|}{|a|^{1/2}} L^2$ et la pression est dans L^2.

2. A partir de la formule (7.25), on peut construire des exemples où la pression n'est pas dans L^2. Lorsqu'on travaille sur une variété produit $Y \times]0, \infty[$, $Y = \partial\Omega$, il suffit de choisir

$$\begin{cases} \underline{f}_{\shortparallel} = 1_{x \geq 0} e^{-x\underline{\zeta}} \underline{\zeta}^{3/2} \frac{\xi'}{k} a(\tau, \xi') - \frac{\xi'}{k} a(\tau, \xi') \underline{\zeta}^{1/2} \delta_{x=0} = -\partial_x \left[1_{x \geq 0} e^{-x\underline{\zeta}} \underline{\zeta}^{1/2} \frac{\xi'}{k} a \right] \\ \underline{f}_{\perp} = 1_{x \geq 0} e^{-x\underline{\zeta}} \underline{\zeta}^{1/2} ik a(\tau, \xi') = i\sqrt{-\Delta_{\shortparallel}} (1_{x \geq 0} e^{-x\underline{\zeta}} \underline{\zeta}^{1/2} a) \end{cases}$$

avec $a(\tau, \xi') \in L^2$, Re$\underline{\zeta} > 0$; $\underline{\zeta}^2 = \xi'^2 + i\tau$, $k = \mid \xi' \mid$ et $i\xi' a = \nabla a$, $k = \sqrt{|\Delta_Y|}$.

Preuve de la Proposition 7.1 :

Lorsqu'on est sur une variété produit $Y \times \mathbb{R}_+$, il n'y a pas de couplage entre $u_\perp$ et $u_{\shortparallel}$ dans Δ_1 de sorte que (7.25) est conséquence de (7.24) presque immédiatement, en utilisant $-\mathrm{div}_{\shortparallel} \underline{f}_{\shortparallel} = \partial_x \underline{f}_\perp$.
Dans le cas général, (qui est celui d'un ouvert borné), on doit vérifier que les termes croisés n'interviennent pas (ils ne perturbent que la partie L^2 de la pression). C'est pour cela qu'on s'est donné la peine d'expliciter la structure matriciel des opérateurs.

On commence par calculer le second membre de (7.24). Pour $Q \in \mathcal{A}^{-4}$ ayant la structure de E, on a puisque $\underline{f} \in L^2(\tau, H^{-1})$, avec $\Pi_0 = (i\tau - \Delta_{0,\shortparallel})^{1/2}$

$$(Q\underline{f})\big|_{x=0} \in \Pi_0^{-5/2} L^2(\tau, L^2(\partial\Omega)), \tag{7.27}$$

(C'est l'estimation pour $\kappa \in L^2$

$$\int \frac{\mid \kappa(\tau,\eta,\xi) \mid (1+ \mid \eta \mid + \mid \xi \mid)}{(\xi^2 + \Pi_0^2)^2} d\xi \leq \mid \kappa(\tau,\eta,\cdot) \mid_{L^2} \Pi_0^{-5/2}).$$

Donc d'après (7.16) et (7.18)

$$(\Gamma^0)^{-1} E(\underline{f})\big|_{x=0} \equiv (\Gamma^0)^{-1} \begin{bmatrix} E_0(f_\perp)\big|_{x=0} \\ E_{\shortparallel}(f_{\shortparallel})\big|_{x=0} \end{bmatrix} \text{ modulo } \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau, H^{-1}(\partial\Omega)).$$

Comme $E_{0,\shortparallel}(f_{\perp,\shortparallel})\big|_{x=0} \in \Pi_0^{-1/2} L^2(\tau, L^2(\partial\Omega))$ et que

$$(\Gamma^0)^{-1} = \begin{pmatrix} (\Gamma_0^0)^{-1} & 0 \\ 0 & (\Gamma_{\shortparallel}^0)^{-1} \end{pmatrix} + \sum_j \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \partial_{y_j} \text{ modulo } \mathcal{A}_0^{-1}$$

avec $b, c, d \in \mathcal{A}_0^{-1}$, on obtient modulo $\Pi_0^{-3/2} L^2(\tau, H^{-1}(\partial\Omega))$

$$\left[(\Gamma^0)^{-1} E(\underline{f})\big|_{x=0}\right]_{1^{er} comp} \equiv (\Gamma_0^0)^{-1} \left[E_0(\underline{f}_\perp)\right]\big|_{x=0} \tag{7.28}$$

On va maintenant calculer le terme $E_0(\underline{f}_\perp)\big|_{x=0}$ en utilisant la condition de divergence nulle.
Soit $e_0(\tau, x, y, \xi, \eta)$ le symbole de E_0 (complet, ou en ne conservant que les N premiers termes). On a (calcul local près du bord)

$$E_0(\underline{f}_\perp)\big|_{x=0} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{-ix'\xi + i(y-y')\eta} e_0(\tau, 0, y, \xi, \eta) \underline{f}_\perp(x', y) dx' dy d\xi d\eta,$$

soit

$$E_0(\underline{f}_\perp)\Big|_{x=0} = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int e^{i(y-y')\eta}\left[\frac{-1}{2\pi}\int_{-r_0}^{r_0}\int_{\xi\in\gamma_-} e^{-ix'\xi}e_0(\tau,0,y,\xi,\eta)\underline{f}_\perp(x',y)dx'd\xi\right]dyd\eta$$

où γ_- est un cercle autour de $-\underline{\zeta}\in\mathbb{C}$, $\underline{\zeta}(\tau,y,\eta)$ étant la racine à partie imaginaire positive de $\underline{\zeta}^2+\mid\eta\mid^2+i\tau=0$. Soit $\psi(x,y,\xi)$ un symbole en ξ tel que

$$\partial_{x'}\left[e^{-ix'\xi}\frac{\psi}{\sqrt{\det g}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\det g}}e^{-ix'\xi}+\mathcal{O}(\xi^{-\infty})$$

défini pour ξ au voisinage de $\underline{\xi}$, l'asymptotique étant associée au poids $(\tau^{1/2}+\|\eta\|)$.
On a, modulo $\tau^{-\infty}C^\infty(\partial\Omega)$, en intégrant par parties,

$$E_0(\underline{f}_\perp)\Big|_{x=0} = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int e^{i(y-y')\eta}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-r_0}^{r_0}dx'\int_{\xi\in\gamma_-}e^{-ix'\xi}\frac{\psi}{\sqrt{\det g}}e_0(\partial_{x'}\sqrt{\det g}\,\underline{f}_\perp)d\xi\right)dyd\eta.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_{x'}\sqrt{\det g}\underline{f}_\perp=-\operatorname{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}$, on en déduit

$$E_0(\underline{f}_\perp)\big|_{x=0}=\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\int e^{i(y-y')\eta}(-\frac{1}{2\pi})\int dx'\int_{\gamma-}e^{-ix'\xi}\psi e_0\operatorname{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}dx'd\xi dyd\eta$$

Comme on a $\psi=\frac{-1}{i\xi}+0(\frac{1}{\xi^2})$, cela prouve

$$E_0(\underline{f}_\perp)\Big|_{x=0}\in\Pi_0^{-3/2}L^2(\tau;H^{-1}(\partial\Omega))$$

et comme $(\Gamma_0^0)^{-1}$ a même symbole principal que $2\Pi_0$ on obtient modulo $\Pi_0^{-3/2}L^2(\tau,H^{-1}(\partial\Omega))$,

$$(7.29)\qquad\left\{\begin{array}{l}[(\Gamma^0)^{-1}E(\underline{f})\big|_{x=0}]_{1er\text{comp}}=(i\tau-\Delta_0)^{-1}[-\operatorname{div}_{\shortparallel}\underline{f}_{\shortparallel}]\big|_{x=0}\\ [(\Gamma^0)^{-1}E(\underline{f})\big|_{x=0}]_{1er\text{comp}}\in\Pi_0^{-1/2}L^2(\tau;H^{-1}(\partial\Omega))\end{array}\right.$$

On calcule maintenant le terme de gauche de (7.24). On a

$$(\Gamma^0)^{-1}\Gamma^1=\begin{pmatrix}L_0 & 0\\ 0 & L_1\end{pmatrix}+\sum_j\begin{pmatrix}0 & B\\ C & D\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y_j}\text{ modulo }\mathcal{A}_0^{-1}$$

avec $B, C, D \in \mathcal{A}_0^{-1}$, $\sigma(L_1) = \sigma(L_0)Id$, $\sigma(L_0) = \sigma(\Pi_0)$,$\Pi_0 = (i\tau - \Delta_{0,\shortparallel})^{1/2} \in \mathcal{A}_0^1$, où σ désigne le symbole principal, d'après (7.19), (7.20), (7.21). Le terme de gauche de (7.24) vaut donc d'après (7.23)

$$-\Delta_{0,\shortparallel}p_0 + L_0 p_1 + Q_1 p_1 + Q_2\partial_y p_0 + Q_3\partial_y^2 p_0 \overset{\text{def}}{=} I, \tag{7.30}$$

avec $Q_j \in \mathcal{A}_0^{-1}$.
Soit (e_k, ω_k) une décomposition spectrale de $-\Delta_{0,\shortparallel}$ sur $\partial\Omega$:

$$-\Delta_{0,\shortparallel}e_k = \omega_k^2 e_k \quad (e_k|e_j)_{L^2(\partial\Omega)} = 1,$$

et χ l'opérateur

$$f = \Sigma f_k e_k \mapsto \chi(f) = \Sigma\psi(\frac{\omega_k^2}{\varepsilon_0\tau})f_k e_k \tag{7.31}$$

avec $\varepsilon_0 > 0$ petit, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ près de 0.
On a $\chi = \psi(\frac{-\Delta_{0,\shortparallel}}{\tau}) \in \mathcal{A}_0^0$ et a pour symbole principal $\psi(\frac{\|\eta\|^2}{\varepsilon_0\tau})$. On a

$$\begin{cases} \chi(I) = J + L_0\chi(p_1) - \chi\Delta_{0,\shortparallel}(p_0) \\ \\ J = [\chi, L_0]p_1 + \chi[Q_1 p_1 + Q_2\partial_y p_0 + Q_3\partial_y^2 p_0]. \end{cases} \tag{7.32}$$

Comme $[\chi, \Pi_0] = 0$, on a $[\chi, L_0] = [\chi, L_0 - \Pi_0] \in \mathcal{A}_0^{-1}$ d'où en utilisant (7.14) et $\|\eta\| \leq C^{te}\tau^{1/2}$ sur le support de χ

$$J \in \tau\Pi_0^{-1}L^2(\tau; H^{-1/2}). \tag{7.33}$$

Posons

$$H = [(i\tau - \Delta_0)^{-1}(-\text{div}_{\shortparallel}\underline{f_{\shortparallel}})]_{x=0} \in \Pi_0^{-1/2}L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)). \tag{7.34}$$

On a d'après (7.24), (7.29)

$$I \equiv i\tau H \text{ modulo } i\tau\Pi_0^{-3/2}L^2(\tau, H^{-1}(\partial\Omega)). \tag{7.35}$$

D'où par (7.32), (7.34)

$$L_0\chi p_1 - \chi\Delta_{0,\shortparallel}p_0 \in \tau\Pi_0^{-1/2}L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)). \tag{7.36}$$

Comme on a supposé $0 = \int_{\partial\Omega} p_0$, on a $+\Delta_{0,\shortparallel} p_0 = E_1(y, \partial_y) p_1$, où E_1 est un opérateur pseudo différentiel de degré 1, de symbole principal $\|\eta\|$. (E_1 n'est pas dans $\mathcal{A}_0^1$, car il y a un problème sur $\eta = 0$), donc de la forme $E_1 = E_0 + |\Delta_{0,\shortparallel}|^{1/2}$ où E_0 est un o.p.d. de degré 0. On a donc

$$[\chi, E_1] p_1 = [\chi, E_0] p_1 \in \tau \Pi_0^{-1} L^2(\tau, H^{1/2}(\partial\Omega)). \tag{7.37}$$

Il en résulte que

$$(L_0 - E_1)\chi p_1 \in \tau \Pi_0^{-1/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)), \tag{7.38}$$

donc si ε_0 est assez petit

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi p_1 \in \sqrt{\tau} \Pi_0^{-1/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)) \\ \\ \chi p_0 \in \sqrt{\tau} \Pi_0^{-1/2} L^2(\tau; L^2(\partial\Omega)) \end{array} \right. \tag{7.39}$$

ce qui prouve déjà $\chi p_1 \in \tau^{1/4} L^2(\tau; H^{-1})$ et $\chi p_0 \in \tau^{1/4} L^2(\tau, L^2)$. Compte tenu du support de χ on peut aussi écrire (7.39) $\chi p_1 \in \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega))$.

On a donc maintenant une meilleure estimation de J, à savoir

$$J \in \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)). \tag{7.40}$$

On a aussi, puisque L_0 et Π_0 ont même symbole principal, et de même pour E_1 et $\mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_0 \chi p_1 - \Pi_0 \chi p_1) \in \mathcal{A}_0^0 \chi p_1 \in \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)) \\ \\ (E_1 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}) \chi p_1 \in \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)) \end{array} \right. \tag{7.41}$$

et $[\chi, E_0] p_1 \in \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega))$. D'où

$$[\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}] \chi p_1 \equiv i\tau \chi(H) \bmod \tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}(\partial\Omega)). \tag{7.42}$$

Comme

$$\begin{aligned} (\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}) e_k &= (\sqrt{i\tau + \omega_k^2} - \omega_k) e_k \\ &= \tfrac{i\tau}{\sqrt{i\tau + \omega_k^2} + \omega_k} e_k \end{aligned}$$

l'opérateur $\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2}$ est inversible et

$$(7.43) \qquad \begin{cases} (\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2})^{-1} \left[\tau \Pi_0^{-3/2} L^2(\tau; H^{-1}) \right] & \subset \Pi_0^{-1/2} L^2(\tau, H^{-1}) \\ & \subset L^2(\tau, H^{-1/2}) \end{cases}$$

si r_1 est la solution de (7.25), c'est à dire $r_1 = (\Pi_0 - \mid \Delta_{0,\shortparallel} \mid^{1/2})^{-1} i\tau H$, on a d'après (7.34) et (7.42)

$$(7.44) \qquad \chi p_1 - r_1 \in L^2(\tau; H^{-3/2})$$

ce qui achève la preuve de la proposition 7.1 compte tenu de (7.14).

8 Références

[1] C. Fabre et G. Lebeau. Prolongement unique des solutions des équations de Stokes. Comm. in PDE, 21(3-4), 1996.

[2] C. Fabre. Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems. ESAIM Control and Calc. Var., 1, 1996.

[3] E. Fernandez-Cara et J. Real. On a conjecture due to J.L. Lions, Nonlinear An., theory methods Appl.21,(11),1993.

[4] E. Fernandez-Cara. On the approximate and null controllability of the Navier Stokes equations. Siam Rev., 41(2), 1999.

[5] L.Hormander.The Analysis of Linear Partial Differential Operators, chapter 18.Grundlerhen 274, Springer, 1994.

[6] O.A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous imcompressible flow.* Math. and Appl., Gordon and Breach, 19963.

[7] J.C. Saut et B. Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. Journ. Diff. Equ., 66(1), 1987.

[8] J.C. Saut et R. Temam. Generic properties of Navier Stokes equations. Indiana Univ. Math. Journ., 29, 1980.

[9] R. Temam. *Navier Stokes Equations.* Studies in Math. and Appl., North Holland, 1984.