Théorème : (Reconstruction du signal f à partir du discrétisé $(f(nT))_{n\in\mathbb{Z}}$
(Théorème de Nyquist)

Si $\hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall\ |\omega| > \frac{\pi}{T}$

Alors $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT) h_T(t-nT)$

$$h_T(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

- \+ T est grand : + l'hypothèse $\hat{f}\big|_{]-\frac{\pi}{T};\frac{\pi}{T}[^c} = 0$ est restrictive
- \+ on met de contrainte (lorsque T grand) et moins on a besoin de valeurs dans l'échantillon. (si on remplace T par $2T$ on garde la moitié des valeurs de l'échantillon)
- On sait si $\hat{f}(\omega)\big|_{]-\frac{\pi}{T};\frac{\pi}{T}[^c} = 0$ alors

$$f(t) = \lim \sum_{-N}^{N} f(nT)\, h_T(t-nT)$$

Peut-on préciser la convergence :

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} f(nT) h_T(t-nT) \text{ vers } f.$$

- Exercice 6 : cas $T=1$, $\hat{f}\big|_{[-\pi;\pi]^c} = 0$, $f \in L^2$

$$f_N(t) = \sum_{-N}^{N} f(n) \operatorname{sinc}(\pi(t-n))$$

1) Si $e_n(t) = \mathrm{sinc}(\pi(t-n))$, que vaut $\hat{e}_n$?

2) En déduire : $\hat{f}_N$ = proj de $\hat{f}$ sur $\mathrm{Vect}\{\hat{e}_{-N}, \dots, \hat{e}_N\}$

3) En déduire $\hat{f}_N \xrightarrow{L^2} \hat{f}$

4) " $\hat{f}_N \xrightarrow{L^1} f$

5) " $f_N \xrightarrow{U} f$.

---

1) $\widehat{\mathbb{1}_{[-1;1]}} = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)$ 2 fonctions L_2.

Donc par reconstruction :

$$\mathbb{1}_{-1 \le t \le 1} = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int e^{i\omega t}\,\cancel{2}\,\mathrm{sinc}(\omega)\,d\omega$$

$$\hat{e}_n(\omega) = \int e^{-i\omega t}\,\mathrm{sinc}(\pi(t-n))\,dt$$

$u = \pi(t-n)$ $\qquad \frac{du}{\pi} = dt$

$$= \int e^{-i\omega\left(n+\frac{u}{\pi}\right)}\,\mathrm{sinc}\,u\,\frac{du}{\pi}$$

$$= e^{-i\omega n}\boxed{\frac{1}{\pi}\int e^{i\left(\frac{\omega}{\pi}\right)u}\,\mathrm{sinc}\,u\,du}$$

$$= e^{-i\omega n}\,\mathbb{1}_{-1 \le -\frac{\omega}{\pi} \le 1}$$

$$\boxed{\hat{e}_n(\omega) = e^{-i\omega n}\,\mathbb{1}_{-\pi \le \omega \le \pi}}$$

2) • Indication : que dire de la famille $\{\hat{e}_{-N}, \dots, \hat{e}_N\}$ dans L^2 ???

• Calculer la projection de $\hat{f}$ sur $\mathrm{Vect}\{\hat{e}_{-N}, \dots, \hat{e}_N\}$

Rem : On a $\langle \hat{e}_n, \hat{e}_m \rangle$

$$= \int \left(\hat{\varphi}_n^{(\omega)}\right)\left(\hat{\varphi}_m^{(\omega)}\right)^* d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega n}\, e^{i\omega m}\, d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(m-n)}\, d\omega \underset{m\neq n}{=} \left[\frac{e^{i\omega(m-n)}}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\underset{m=n}{=} 2\pi$$

Donc $\boxed{\langle \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_m \rangle = 2\pi\, \mathbb{1}_{m=n}}$ CQ

$\hat{\varphi}_n$ famille orthogonal ; $\left(\frac{\hat{\varphi}_n}{\sqrt{2\pi}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ famille orthonormale

Appelons $\hat{\pi}^N$ la projection orth sur

$\mathrm{Vect}\{\hat{\varphi}_{-N}; \dots; \hat{\varphi}_N\} = \mathrm{Vect}\{\frac{\hat{\varphi}_{-N}}{\sqrt{2\pi}}; \dots; \frac{\hat{\varphi}_N}{\sqrt{2\pi}}\}$

$$\hat{\pi}^N \hat{f} = \sum_{n=-N}^{N} \langle \hat{f}, \frac{\hat{\varphi}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\hat{\varphi}_n}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\left(e^{-in\omega}\mathbb{1}_{-\pi\leq\omega\leq\pi}\right)^* d\omega\right)}_{\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\omega)\, e^{in\omega}\, d\omega} \hat{\varphi}_n$$

$\mathbb{R}$ pas de borne car $\hat{f}=0$ si $|\omega|>\pi$

// reconstruction

$$\hat{\pi}^N \hat{f} = \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \hat{\varphi}_n$$

$$= \widehat{\left(\sum_{n=-N}^{N} f(n)\, \varphi_n\right)} = \widehat{f_N}$$

On a bien $\widehat{f_N} = \hat{\pi}^N \hat{f}$

Rem : $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_m \rangle = \mathbb{1}_{n=m}$

Donc on a aussi : $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ orthonormale dans L^2.

Et donc : $f_N = \sum_{n=-N}^{N} f(n)\, e_n$ // par reconstruction

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{e}_n \rangle \, e_n .$$

$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

$$f_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle \, e_n$$

On voit que f_N = projeté orth de f sur $\{e_{-N}, \dots, e_N\}$.

3) $\left(\frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \right)_{n\in\mathbb{Z}}$ famille orth. c'est même une base o.n. de $L^2([-\pi;\pi])$

$= \frac{\mathbb{1}_{-\pi<\omega<\pi}\, e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}}$

Toute fonction L^2 sur $[-\pi;\pi]$ se décompose avec sa série de Fourier

$\rightarrow \forall h \in L^2([-\pi;\pi])$, $h = \sum \mathbb{1}_{-\pi<\omega<\pi}\, e^{-in\omega} c_n$

$c_n = \langle h, \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle$

$\|h\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |h|^2(\omega)\, d\omega < \infty$

$= \cancel{\frac{1}{2\pi}} 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

$f \in L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^2$.

$$\|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2^2 = \left\| \sum_{\mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} - \sum_{|n|\leq N} \langle \hat{f}, \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2^2$$

$$= \left\| \sum_{|n|>N} \langle \hat{f}, \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \frac{\hat{e}_n}{\sqrt{2\pi}} \right\|_2^2$$

$$= \sum_{n>N} \underbrace{\left| \langle \hat{f}, \frac{e_n}{\sqrt{2\pi}} \rangle \right|^2}_{|c_n|^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4) $\hat{f}_N \xrightarrow{L^2} \hat{f}$

$\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > \pi$

$\hat{f}_N \in \mathrm{Vect}\{\hat{e}_{-N} \dots \hat{e}_N\}$

où $\hat{e}_n = \mathbb{1}_{-\pi<\omega<\pi} e^{-in\omega}$

donc $\hat{f}_N(\omega) = 0$ si $|\omega| > \pi$ aussi

$\boxed{\text{On : si } \mu(X) < \infty \text{ Alors si } p<q,\ L_q \subseteq L_p.}$

Ici pour $\mathcal{H} = \{f : \hat{f}(\omega) = 0 \text{ si } |\omega| > \pi\}$.

$$\|\hat{f}\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}| \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \Big(\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 d\omega}_{<\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}|^2 d\omega\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|\hat{f}\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\, \|\hat{f}\|_2$$

Si $\hat{f}_N \xrightarrow{L^2} \hat{f}$. Alors $\hat{f}_N \xrightarrow{L^1} \hat{f}$.

Car $\|\hat{f} - \hat{f}_N\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\, \|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2$

5) Donc : Reconstruction

$$|f(t) - f_N(t)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int (\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)) e^{i\omega t} d\omega \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\omega) - \hat{f}_N(\omega)|\, |e^{i\omega t}|\, d\omega$$

$\uparrow$ t dépend

$$= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f} - \hat{f}_N\|_1$$

$$\xrightarrow[\text{unif en } t]{N \to \infty} 0.$$

En particulier : cela implique f est continue (en tant que limite unif de fc$^{\circ}$ continue).

Exo 7 : 1) Montrer que $\sum_{|n|\geq N} |f(n)|^2 \longrightarrow 0$

2) En déduire une vitesse dans la convergence ponctuelle :

à t fixé : $|f_N(t) - f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

(Indication : utiliser la décroissance $\text{sinc}(x)$ en l'infini).

1) On a $f = \sum f(n) \underbrace{\text{sinc}(\pi(t-n))}_{\text{orthonormé dans } L^2}$

Donc $\|f\|_2^2 = \sum_n |f(n)|^2 < \infty$ car $f \in L^2$

Donc $\sum |f(n)|^2$ série convergente

Donc $\sum_{|n|>N} |f(n)|^2$ (son reste) $\xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

2) $|f_N(t) - f(t)|$

$= \left| \sum_{|n|>N} f(n)\, \text{sinc}(\pi(t-n)) \right|$

$\underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} \underbrace{\sqrt{\sum_{|n|>N} |f(n)|}}_{o(1)} \sqrt{\sum_{|n|>N} (\text{sinc}(\pi(t-n)))^2}$

d'après Q 1.

? ? ? ?

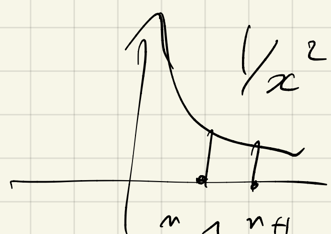
$$|\mathrm{sinc}\, x| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|}$$

Donc $\displaystyle\sum_{|n|>N} \mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2$

$$\pi|t-n| \ge \pi(|n|-|t|)$$
$$\ge \pi\, |n|/2 \quad \text{si } |n|>N>2|t| \quad \left(\overset{\text{car}}{\Longrightarrow} |t|<\frac{|n|}{2}\right)$$

Si $N>2|t|$ alors

$$\sum_{|n|>N} \mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2 \le \sum_{|n|>N} \frac{1}{|\pi(t-n)|^2}$$
$$\le \sum_{|n|>N} \frac{1}{(\pi|n|/2)^2}$$
$$= 2\,\frac{2^2}{\pi^2} \sum_{n>N} \frac{1}{n^2}$$



$$\frac{1}{x^2} \le \frac{1}{n^2}.$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n>N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \frac{8}{\pi^2} \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{8}{\pi^2}\left[\frac{-1}{x}\right]_N^{\infty}$$
$$= \frac{8}{N\pi^2}.$$

Donc :

$$|f_N(t)-f(t)| \le \sqrt{\sum_{|n|>N} |f(n)|^2}\,\sqrt{\sum_{|n|>N} \mathrm{sinc}(\pi(t-n))^2}$$
$$\le o(1)\sqrt{\frac{8}{N\pi^2}}$$
$$= o(N^{-1/2})$$

si $N>2|t|$

donc pas uniforme en t.

Exo 8 : $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \dfrac{\text{sinc}(\pi(t-n))}{n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

- $\| \underbrace{\text{sinc}(\pi(t-n))}_{\varphi_n} \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \| \hat{\varphi}_n \|_2^2 = 1.$

(on a vu que ~~les~~ φ_n les φ_n famille orthonormées).

Donc : $\| f \|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \dfrac{(-1)^n}{n^{(1+\varepsilon)/2}} \right|^2$

$= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$

donc $f \in L^2$.

On $\hat{f} = \sum_{\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^n}{n^{1+\varepsilon/2}} \underbrace{\hat{\varphi}_n}_{\mathbb{1}_{[-\pi;\pi]} e^{in\omega}}$

$= 0$ si $|\omega| > \pi$.

Donc on a si $f_N = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f(n) \, \text{sinc}(\pi(t-n))$

on a $f_N \xrightarrow{\text{Unif}} f$

et $\forall t$: $|f_N(t) - f(t)| = o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Rem : $f(n) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^k k^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} \underbrace{\text{sinc}\, \pi(n-k)}$ $=1$ si $n=k$

0 si $n \neq k$

$\dfrac{\sin \pi(n-k)}{\pi(n-k)} = 0$

$f(n) = (-1)^n n^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}.$

(on sait de toute façon que $\sin k\pi = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\underbrace{\sum (-1)^n n^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} \text{sinc}(\pi(t-n))}_{\text{déf}} = f = \underbrace{\sum f(n)\, n^{-(1+\varepsilon/2)} \text{sinc}(\pi(t-n))}_{\text{reconstruction}}$)

En $t = 1/2$: $\mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{1}{2} - n\right)\right)$

$$= \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2} - n\right)} \times \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \sin -\frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi\left(\frac{1}{2} - n\right)}$$

Donc

$$\left| f_N\left(\tfrac{1}{2}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right) \right| = \left| \sum_{n>N} (-1)^n n^{\frac{-1+\varepsilon}{2}} \, \mathrm{sinc}\left(\pi\left(\tfrac{1}{2} - n\right)\right) \right|$$

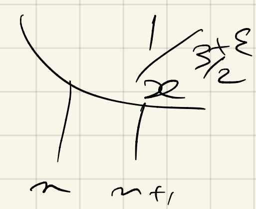
Si $U_n \geq 0$ pour n assez grand et $U_n \sim V_n$

Alors $\sum_{n>N} U_n \sim \sum_{n>N} V_n$

$$= \sum_{n>N} \underbrace{\frac{n^{\frac{-1+\varepsilon}{2}}}{\pi\left(n - 1/2\right)}}_{\sim C n^{-\frac{3+\varepsilon}{2}}} \geq C \sum_{n>N} \frac{1}{n^{\frac{3+\varepsilon}{2}}}$$

Preuve : $\exists N_0 : n > N_0 : (1-\varepsilon) V_n < U_n < (1+\varepsilon) V_n \iff \left| \frac{U_n}{V_n} - 1 \right| < \varepsilon$

$N > N_0$: $\sum_{n>N} U_n \geq \sum_{n>N} (1-\varepsilon) V_n = (1-\varepsilon) \sum_{n>N} V_n$



$$\geq C \sum_{n>N} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^{\frac{3+\varepsilon}{2}}} \, dx$$

$$\geq C \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{3+\varepsilon/2}} \, dx = \frac{C}{(1+\varepsilon)/2} \left[-\frac{1}{x^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \right]_N^{\infty}$$

$$= \frac{C_\varepsilon}{N^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}$$

Moral : $\forall$ vitesse $\alpha > \frac{1}{2}$ on peut trouver f et un t tel que $|f_N(t) - f(t)| \neq o(N^{-\alpha})$

Alors que on sait que $|f_N(t) - f(t)| = o(N^{-1/2})$

$1/2$ est imbattable

Que se passe t-il si : $|\hat{f}(\omega)| = 0$ pour $|\omega| > a$ avec $a < \pi$?

<u>Indication :</u>

1- Calculer $\widehat{f * g}$

2- Calculer $\widehat{e_n * g}$