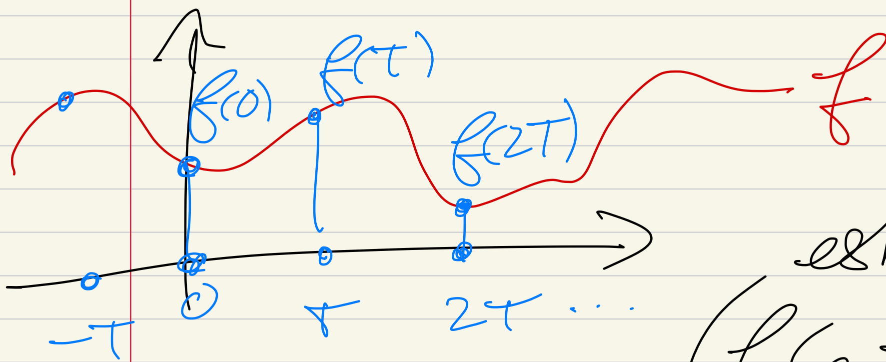
**But** : remplacer $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) \end{array}$ par $\begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ n \mapsto f(nT) \end{array}$

obtenue en échantillonant $f$.




Le discrétisé $fd$ est la collection des valeurs $(f(nT))_{n\in\mathbb{Z}}$

Mais on le définira comme :

$$fd(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\,\delta(t-nT)$$

(ou $fd = \sum f(nT)\,\delta_{nT}$ distribution)

somme coefficientée de diracs $(\delta_{nT})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Définissons le "peigne de Dirac"

# Peigne de Dirac :

$$\boxed{C_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT}}$$

c'est à dire $\langle \phi, C_T \rangle = \int \phi \, C_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(nT)$.

bien défini si $\phi$ à support compact

$$f_d = \sum f(nT)\,\delta_{nT}$$

**Rem** : que vaut si $t \longrightarrow g(t)$ signal

$g\,\delta_\tau$ ? $\quad \int \varphi(t)\,g(t)\,\delta_\tau = \varphi(\tau)\,g(\tau)$

Donc $\langle \varphi, g\,\delta_\tau \rangle = \varphi(\tau)\,g(\tau)$

$= \langle \varphi, g(\tau)\,\delta_\tau \rangle$.

Donc $\boxed{g\,\delta_\tau = g(\tau)\,\delta_\tau.}$

Donc $f\,C_T = f \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{nT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\,\delta_{nT}$

$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\,\delta_{nT} = f_d$

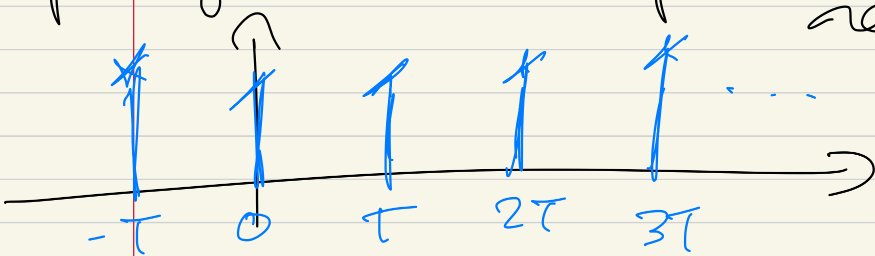
Nouvelle formulation

$$\boxed{f_d = f \cdot C_T}$$

$$\boxed{f_d = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\,\delta_{nT} = f\, c_T}$$

où $c_T$ = peigne de Dirac $= \sum \delta_{nT}$.

peigne car sa forme ressemble à un peigne.




$f_d$ = multiplication de $f$ par $c_T$.

⇝ on étudie $c_T$

En particulier $\widehat{f_d} = \widehat{f c_T} = \frac{1}{2\pi}\, \hat{f} * \widehat{c_T}$.

⇝ Que vaut $\widehat{c_T}$ ?

**Prop** (Formule de Poisson) $C_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{t-nT}$

$$\hat{C}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \frac{2\pi}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

**Rem** : • $\hat{\delta}_\tau(\omega) = \int e^{-it\omega} \delta_\tau(t)\, dt = e^{-i\tau\omega}$

Donc $\widehat{C_T} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-inT\omega}$.

• l'égalité non trivial $=$ est à prendre au sens des distributions : $\forall \phi$ à support compact ($\mathcal{C}^\infty$)

$$\lim_{N\to\infty} \int \sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega} \phi(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{2k\pi}{T}\right)$$

**Dém** : $\omega \longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{e^{-inT\omega}}_{\text{chaque terme est } \frac{2\pi}{T} \text{ periodique}}$

Il suffit de voir que si $\phi$ à support sur $\left[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}\right]$, $\int \sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega} \phi \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2\pi}{T} \phi(0)$

On veut : $\lim_N \int \sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega} \phi(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi}{T}\phi(0)$

$$\sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega} = e^{-iNT\omega}\left(1 + e^{+iT\omega} + e^{+2iT\omega} + \cdots + e^{+i2NT\omega}\right)$$

$\in \mathbb{R}$ — suit géom de raison $e^{+iT\omega}$

$$= e^{-iNT\omega} \frac{e^{+iT\omega(2N+1)} - 1}{e^{+iT\omega} - 1}$$

$$= \boxed{e^{-iNT\omega} \frac{e^{+iT\omega\frac{2N+1}{2}}}{e^{iT\omega/2}}} \frac{2i}{2i} \frac{e^{+iT\omega\frac{2N+1}{2}} - e^{-iT\omega\frac{2N+1}{2}}}{e^{iT\omega/2} - e^{-iT\omega/2}}$$

$e^{iT\omega(-N+N+1/2-1/2)}$

$= 1$

$$= \sin\left(T\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\right) \Big/ \sin(T\omega/2)$$

$$\int \sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega} \phi(\omega)\, d\omega = \int \sin\left(T\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega\right) \frac{\phi(\omega)}{\sin\frac{T\omega}{2}}\, d\omega$$

$\int f g$ intégrale d'un produit

$\rightsquigarrow$ Fourier intégrale d'une convolution $2\pi \int f\, g$

**Rappel** :

$$\widehat{\mathbb{1}_{-1<x<1}} = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

donc

$$\widehat{\mathbb{1}_{-1<\frac{x}{a}<1}} = 2a\,\frac{\sin a\omega}{a\omega} = \frac{2\sin a\omega}{\omega}$$

$$\widehat{\mathbb{1}_{x\in[-T(N+1/2);\,T(N+\frac{1}{2})]}} = \frac{2\sin T(N+1/2)\omega}{\omega}$$

$$\int \sum_{-N}^{N} e^{-inT\omega}\,\phi(\omega)\,d\omega = \frac{1}{T}\int \underbrace{\frac{2\sin(T(N+1/2)\omega)}{\omega}}_{\widehat{\mathbb{1}_{|x|\le T(N+1/2)}}}\ \underbrace{\frac{T\omega/2\ \phi(\omega)}{\sin\frac{T\omega}{2}}}_{\hat{\psi}}\,d\omega$$

où $\psi$ est telle que

$$\hat{\psi} = \frac{\frac{T\omega}{2}\,\phi(\omega)}{\sin(T\omega/2)} = \frac{\phi(\omega)}{\operatorname{sinc}\frac{T\omega}{2}}$$

($\psi$ existe par le résultat de reconstruction)

$$= \frac{1}{T}\int \widehat{\mathbb{1}_{|x|\le T(N+1/2)}}(\omega)\,\hat{\psi}(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{2\pi}{T} \int \mathbb{1}_{|x| \leq T(N+1/2)} \, \psi(x)\, dx. \quad \longrightarrow \in L^2$$

$$= \frac{2\pi}{T} \int_{-T(N+1/2)}^{T(N+1/2)} \psi(x)\, dx.$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2\pi}{T} \int \psi(x)\, dx = \frac{2\pi}{T} \int \psi(x) e^{-i0x}\, dx$$

$$= \frac{2\pi}{T} \hat{\psi}(0) = \frac{2\pi}{T} \frac{\phi(0)}{\operatorname{sinc}(0)} = \frac{2\pi}{T}\phi(0)$$

<u>Résumons</u> : $\phi$ est nul hors de $\left[-\frac{\pi}{T} ; \frac{\pi}{T}\right]$.

$$\boxed{\int \sum_{-N}^{N} e^{-in\omega T} \phi(\omega)\, d\omega \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2\pi}{T} \phi(0)}$$

En prolongeant par periodicité ; $\phi$ à support compact.

$$\int \sum_{-N}^{N} e^{-in\omega T} \phi(\omega)\, d\omega \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{2\pi}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi\left(\frac{2k\pi}{T}\right)$$

$\blacksquare$

Conséquence : on peut retrouver $f$ à partir de $\hat{f}$ (avec des hypothèses)

Théorème (Nyquist)

Si $\hat{f}(\omega) = 0 \quad \forall\, |\omega| > \frac{\pi}{T}$

Alors on peut retrouver $f$ à partir de $f_d$ :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h_T(t-nT)$$

où $h_T(t) = \mathrm{sinc}\,(\pi t/T)$

Dem : $f_d = f\, c_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\, \delta(t-nT)$

$$\hat{f_d} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\, e^{-inT\omega}$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g} \implies \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}$$

Donc $\hat{f_d} = \widehat{f c_T} = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f} * \hat{c}\right)(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$

$(f * \delta_z)(t) = f(t-z)$ $\qquad \hat{c} = \frac{2\pi}{T}\sum \delta_{2k\pi/T}$

$$\boxed{\hat{f}_d = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)}$$

La transformée de Fourier du discrétisé c'est une périodisation de $\hat{f}(\omega)$ de période $\frac{2\pi}{T}$

Ici $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{\pi}{T}$.

Donc si $|\omega| \leq \frac{\pi}{T}$ :

$$\hat{f}_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right) = \frac{\hat{f}(\omega)}{T}$$

Donc $\begin{cases} \hat{f}_d(\omega) = \hat{f}(\omega)/T & \forall\ |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ \hat{f}(\omega) = 0 & \forall\ |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$ (*)

On peut calculer exactement $\hat{f}(\omega)$ à partir de $\hat{f}_d(\omega)$

Soit $h_T(x)$ tel que $\hat{h}_T(\omega) = T\,\mathbb{1}_{|\omega|\leq\frac{\pi}{T}}$ Def de $h_T$

On a : $\hat{f} = \hat{f}_d\,\hat{h}_T$ (équivalent à (*))

Donc $f(t) = f_d * h_T(t)$ (car alors on a bien $\hat{f} = \hat{f_d}\,\hat{h_T}$)

$$= \left(\sum f(nT)\,\delta_{nT} * h_T\right)(t)$$

$$= \sum f(nT)\, h_T(t-nT).$$

• $\widehat{\mathbb{1}_{-1<x<1}} = 2\,\frac{\sin x}{x}$

Donc par reconstruction: $\left(f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,d\omega\right)$

$$\mathbb{1}_{-1<x<1} = \frac{1}{\cancel{2}\pi}\int e^{i\omega x}\,\frac{\cancel{2}\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

<u>Donc</u> $\widehat{\frac{\sin\omega}{\omega}} = \pi\,\mathbb{1}_{-1<x<1}$

$$\widehat{\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}} = \frac{\pi}{|a|}\,\mathbb{1}_{-1<\frac{x}{a}<1} = \frac{\pi}{|a|}\,\mathbb{1}_{-a<x<a}$$

$a = \pi/T$ $$\widehat{\frac{\sin\frac{\omega\pi}{T}}{\frac{\omega\pi}{T}}} = T\,\mathbb{1}_{-\frac{\pi}{T}<x<\frac{\pi}{T}}$$

$$\boxed{h_T = \operatorname{sinc}\frac{\omega\pi}{T}}$$

On a donc : $\displaystyle f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\, h_T(t-nT)$

Si $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > \frac{\pi}{T}$

$= 1$ en $nT$

$|h_T(x-nT)| \leq \frac{1}{|x-nT|}$

$\to 0$ lorsque $x$ s'éloigne de $nT$

Question : à quel point à partir d'un nombre fini de valeurs on a $\displaystyle \sum_{-N}^{N} f(nT)\, h_T(t-nT)$ proche de $f(t)$ ?

---

Énoncé : $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad g(t) = e^{-|t|}$

1) $f$ et $g$ sont elles $L^1$, $L^2$ ?

2) Calculer $\hat{g}$

3) Calculer $\hat{f}$.

---

1) oui $L^1$ et $L^2$, 2 fonctions continues

bornées : pblm en l'∞ : $f \sim \frac{1}{t^2}$ $\pm\infty$

$$f^2 \sim \frac{1}{t^4} \quad \pm\infty$$

Donc $f \in L^1 \,\&\, L^2$

$g \sim e^{-|t|}$ $\quad g^2 \sim e^{-2|t|}$ $\quad g \in L^1 \& L^2$

2) $\hat{g}(\omega) = \int e^{-i\omega t} e^{-|t|} \, dt$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} e^{+t} \, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t} e^{-t} \, dt$$

$$\underset{t'=-t}{=} \int_{\infty}^{0} e^{+i\omega t'} e^{-t'} (-dt') + \text{\_\_\_\_\_\_}$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)}_{2\,\mathrm{Re}\, e^{i\omega t}} e^{-t} \, dt$$

$$= 2\,\mathrm{Re} \int_0^\infty e^{-i\omega t} e^{-t} \, dt \quad \overset{\text{bien}}{=} \quad 2\int_0^\infty \cos \omega t \, e^{-t} \, dt$$

2 IPP

$$= 2\,\mathrm{Re} \left[ \frac{e^{-(i\omega+1)t}}{-(i\omega+1)} \right]_0^\infty$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1}{-(i\omega+1)}\right) = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{+(1-i\omega)}{(1+i\omega)(1-i\omega)}$$

$$\boxed{\hat{g}(\omega) = 2\,\frac{1}{1+\omega^2}}$$

vérification :

$\hat{g}(0) = 2$

$\int f = \int e^{-|t|} = 2\int_0^\infty e^{-t} = 2$ ✓

3) Donc

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi}\int \hat{g}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Donc $\displaystyle\int 2\,\frac{1}{1+\omega^2}\, e^{i\omega t}\, d\omega = 2\pi e^{-|t|}$

donc

$$2\,\hat{f}(-t) = 2\pi\, e^{-|t|}$$

$$\hat{f}(\omega) = \pi\, e^{-|\omega|}$$

(on vérifie $\displaystyle\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = [\mathrm{Arctan}]_{-\infty}^{\infty}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ ✓

$= \pi e^{-|0|}$ )

<u>En proba</u> : Cauchy $\sim \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{1+x^2}$

et pour fonction caractéristique $e^{-|z|}$

Exo : On se donne $T = 1$.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad L^2$ $\qquad$ supposons $\hat{f}(\omega) = 0$ pour $|\omega| > \pi$
- $f_d(t) = \sum f(n)\, \delta_n$
- Théorème Nyquist :

$$\boxed{f = \sum_{-\infty}^{\infty} f(n)\, \operatorname{sinc}(\pi(t-n))}$$

- But étudiez $f_N \longrightarrow f$ où

$$f_N = \sum_{-N}^{N} f(n)\, \operatorname{sinc}(\pi(t-n))$$

1) on pose $e_n = \operatorname{sinc}(\pi(t-n))$, calculer $\hat{e}_n$

2) En déduire que $\hat{f}_N$ = projection orth dans $L^2$ de $\hat{f}$ sur $\{\hat{e}_{-N}, \hat{e}_{-N+1}, \dots, \hat{e}_N\}$

3) En déduire $\hat{f}_N \xrightarrow{L^2} \hat{f}$ puis $\hat{f}_N \xrightarrow{L^2} f$

puis $f_N \xrightarrow{\text{unif}} f$

2) Indication : Si $F \subseteq L^2$ avec $e_1, \dots, e_k$ $\boxed{\text{b.o.n}}$ de $F$

la projection orthogonale sur $F$ c'est

$$\Pi x = \sum_{i=1}^{k} \langle x | e_i \rangle e_i$$