Université Paris Sud S3 MIAS 2003-2004
Centre d'Orsay Mathématiques

Résumé de cours n°4 — Déterminants

Motivation. Le principal intérêt des déterminants est de fournir des conditions explicites ou des formules qui permettent de répondre à des questions d'algèbre linéaire, par exemple : indépendance linéaire d'une famille de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie, conditions de compatibilité d'un systéme linéaire avec paramètres (sans le résoudre par la méthode de Gauss), formules pour résoudre un système de Cramer. Géométriquement, les déterminants sont liés aux volumes.

Nous allons tout d'abord définir le déterminant d'une matrice carrée, ensuite celui d'une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n, finalement définir une "application déterminant" sur un espace vectoriel E de dimension finie et le déterminant d'un endomorphisme de E.

Dans toute la suite, $K = \mathbb{R}$ *ou* $K = \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} \in M_n(K)$. *On note* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *les vecteurs colonnes de la matrice* A $(c_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \in K^n,\ 1 \le j \le n)$. *On notera souvent* $A = (c_1, \ldots, c_n)$, *lorsqu'on aura à décrire des propriétés du déterminant qui concernent les colonnes de la matrice* A.

Définition 1. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} \in M_n(K)$. On définit, par récurrence, une application $det : A \in M_n(K) \mapsto det\ A \in K$, de la manière suivante :

- si $n = 1$, $A = (a) \in M_1(K)$, on pose $det\ A = a$.
- si $n > 1$, notons A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i^e ligne et la j^e colonne ; alors $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ et on pose :

$$det\ A = a_{11} det\ A_{11} - a_{12} det\ A_{12} + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j} det\ A_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} det\ A_{1n}\ .$$

Le scalaire $det\ A$ s'appelle **le déterminant de** A et on note $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $det\ A = -11$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $det\ A = ad - bc$.

Interprétation géométrique : soient $u = (a, c)$ et $v = (b, d)$ dans $\mathbb{R}^2$, notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire (algébrique) du parallélogramme déterminé par u et v, alors $det\ A = \mathcal{A}(u, v)$.

Exemple 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $det\ A = -7$; $A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$,

$det\ A = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - a'bc'' - ab''c'$ (d'où la règle de Sarrus).

Interprétation géométrique : soient $u = (a, b, c)$, $v = (a', b', c')$ et $w = (a'', b'', c'')$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $det\ A$ est le volume (algébrique) du parallépipède de côtés u, v et w.

Théorème 1. L'application $det : A \in M_n(K) \mapsto det\ A \in K$ a les propriétés suivantes :

1. Soit $A = (c_1, \ldots, c_n) \in M_n(K)$.
   (a) Pour tout $\lambda \in K$ et pour $1 \le j \le n$, $det(c_1, \ldots, \lambda c_j, \ldots, c_n) = \lambda det(c_1, \ldots, c_n)$.
   (b) Pour $1 \le j \le n$, s'il existe $c'_j = (a'_{1j}, \ldots, a'_{nj})$ et $c''_j = (a''_{1j}, \ldots, a''_{nj})$ dans K^n tels que $c_j = c'_j + c''_j$, alors $det(c_1, \ldots, c'_j + c''_j, \ldots, c_n) = det(c_1, \ldots, c'_j, \ldots, c_n) + det(c_1, \ldots, c''_j, \ldots, c_n)$.
2. Si $A \in M_n(K)$ a deux colonnes égales alors $det\ A = 0$.
3. Si I_n est la matrice identité d'ordre n, on a $det I_n = 1$.

La preuve se fait par récurrence sur l'entier n. Les vérifications sont immédiates pour $n = 1, 2$. Pour passer du cas n au cas $n+1$, on peut consulter [JG], page 133.

Remarques. 1. Soient $A, B \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$. On a $det(\lambda A) = \lambda^n det A$ et en général, $det(A+B) \neq det A + det B$.
2. On peut résumer les propriétés 1 et 2 en disant que le déterminant, consideré comme une fonction des colonnes d'une matrice, est une **forme multilinéaire alternée** (c'est-à-dire, linéaire par rapport à chaque colonne et ayant la propriété 2).

Corollaire 1. Si on échange entre elles deux colonnes d'une matrice A, le déterminant de A change de signe.

Corollaire 2. Si on ajoute à une colonne d'une matrice A une combinaison linéaire d'autres colonnes on ne modifie pas $det A$.

Théorème 2. Soit $A = (c_1, \ldots, c_n) \in M_n(K)$. Alors $det A \neq 0$ si et seulement si la suite $(c_1, \ldots, c_n)$ de vecteurs de K^n est une base de K^n, ou encore, si et seulement si A est inversible.

Pour pouvoir dès maintenant calculer facilement des déterminants, nous allons admettre provisoirement le théorème suivant, qui dit que dans la définition de $det\ A$ on peut remplacer le développement suivant la première ligne par le développement suivant n'importe quelle ligne ou colonne. Il s'ensuit que toutes les propriétés des déterminants relatives aux colonnes d'une matrice sont égalemment valables pour les lignes.

Théorème (AP). Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(K)$.

(a) $det\ A = (-1)^{i+1} a_{i1} det\ A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+j} a_{ij} det\ A_{ij} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} det\ A_{in}$,
pour $1 \leq i \leq n$ (développement suivant la i^e ligne).

(b) $det\ A = (-1)^{1+j} a_{1j} det\ A_{1j} + \cdots + (-1)^{i+j} a_{ij} det\ A_{ij} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} det\ A_{nj}$,
pour $1 \leq j \leq n$ (développement suivant la j^e colonne).

(c) $det({}^tA) = det\ A$.
(où ${}^tA = (b_{ij}) \in M_n(K)$, $b_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, est la transposée de la matrice A).

Méthodes de calcul d'un déterminant

Soit $A \in M_n(K)$. Pour calculer $det A$, on fait apparaître le plus possible de zéros sur une ligne (ou colonne), en ajoutant à cette ligne (ou colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (ou colonnes). Si l'on peut faire apparaîttre $n-1$ zéros, on se retrouve avec un déterminant d'ordre $n-1$, et on recommence le procédé.

Exemple 1. $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} \sin a & \sin 2a & \sin 3a \\ 1 & -2\cos a & -1 \\ -\cos a & \cos 2a & 0 \end{vmatrix}$,
où a, b et c sont des nombres réels (dans D_2, avant de faire apparaîttre des zéros, on a intérêt à obtenir une ligne ou colonne à coefficients constants).

Exemple 2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P défini pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$P(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & -2 \\ 3 & x-2 & 8 \\ -2 & 3 & x-7 \end{vmatrix}$ (essayer d'avoir directement les racines par combinaison linéaire de lignes ou colonnes, éviter d'utiliser la règle de Sarrus).

Déterminant d'une suite de vecteurs, application déterminant

Définition 2. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de E et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une suite de n vecteurs de E. Soit $A = (a_{ij}) = (c_1, \dots, c_n)$ la matrice des coordonnées des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire, on a $v_j = a_{1j}b_1 + \cdots + a_{nj}b_n$ et $c_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in K^n$, $1 \leq j \leq n$. On pose :

$$det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = detA = det(c_1, \dots, c_n).$$

Proposition 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $D : (v_1, \dots, v_n) \in E^n \mapsto det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \in K$ a les propriétés suivantes :

1a. Pour tous $\lambda \in K$ et $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, $D(v_1, \dots, \lambda v_j, \dots, v_n) = \lambda D(v_1, \dots, v_n)$.

1b. Pour tous $(v_1, \dots, v'j, \dots, v_n)$ et $(v_1, \dots, v"_j, \dots, v_n)$ dans E^n,

$$D(v_1, \dots, v'_j + v"_j, \dots, v_n) = D(v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n) + D(v_1, \dots, v"_j, \dots, v_n).$$

2. Si le n^{uple} $(v_1, \dots, v_n)$ contient deux vecteurs égaux alors $D(v_1, \dots, v_n) = 0$.

3. $D(b_1, \dots, b_n) = 1$.

Proposition 2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E et $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$. Alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Définition 3. Une **application déterminant** sur un K-espace vectoriel E est une application $D : E^n \to K$ ayant les propriétés 1a, 1b et 2 de la Proposition 1. On dit alors que D est une **forme multilinéaire alternée** sur E.

Théorème 3. (fondamental) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in N^*$. Alors il existe une application déterminant D sur E, non nulle. Si D' est une autre application déterminant sur E, il existe $\lambda \in K$ tel que $D' = \lambda D$.

Corollaire. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in N^*$. L'ensemble des applications déterminants sur E, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un K-espace vectoriel de dimension un.

Remarques. La Proposition 1 assure l'existence de D. L'unicité sera prouvée pour $n = 2$. On montre facilement que l'ensemble des fonctions déterminants sur un K-espace vectoriel peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K. L'énoncé du Théorème 3 dit que cet espace vectoriel est de dimension 1.

Proposition 3. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$. Alors : $det_{\mathcal{B}'}(v_1, \dots, v_n) = det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\ det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

Remarque. La Proposition 3 dit que le déterminant de n vecteurs dépend de la base dans laquelle on exprime ces vecteurs, mais le fait que ce déterminant soit non nul ne dépend pas de la base, d'après la Proposition 2.

Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $f \in L(E)$. On appelle **déterminant de f dans la base $\mathcal{B}$** le nombre $det_{\mathcal{B}}(f) = det_{\mathcal{B}}(f(b_1), \dots, f(b_n)) = det(M_{\mathcal{B}}(f)$.

Théorème 4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E, f et g dans $L(E)$.

(a) Pour tout $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$, $det_{\mathcal{B}}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = det_{\mathcal{B}}(f)\ det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$.

(b) $det_{\mathcal{B}}(f \circ g) = det_{\mathcal{B}}(f)\ det_{\mathcal{B}}(g)$.

(c) Si A et B sont deux matrices de $M_n(K)$, on a $det(AB) = detA \times detB$.

Si A est inversible, alors $detA \neq 0$ et $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.

(d) Pour toute base $\mathcal{B}'$ de E on a $det_{\mathcal{B}'}(f) = det_{\mathcal{B}}(f)$.

Définition 5. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in L(E)$. Le nombre $det_{\mathcal{B}}(f)$, qui ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$, est appelé **le déterminant de** f et est noté $det(f)$ (notons : f est un automorphisme de $E \Leftrightarrow det(f) \neq 0$).

Question. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$. A-t-on $det(A) = det(B)$?

Exemples d'application. 1. Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E, α et β deux paramètres dans K et $f \in L(E)$ telle que $M(f, \mathcal{B}) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha & \beta \\ \beta & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de α et β : f est-il un isomorphisme de E ? f est-il une projection de E ?

2. Soit $s \in L(\mathbb{R}^3)$ la symétrie par rapport au plan vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x-y-z/2 = 0$ et de direction la droite $\mathcal{D} = \{\lambda(1, 0, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Calculer $det\ (s)$.

Applications des déterminants (exemples donnés en cours)

1. Calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Définition 6. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Pour $1 \leq i, j \leq n$, $b_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$ est appelé le **cofacteur** de a_{ij}, $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$ est appelée la **comatrice** de A et est notée $co(A)$.

Proposition 4. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ et B sa comatrice. Alors :
$({}^tB)A = A({}^tB) = (detA)I_n$, et si A est inversible, $A^{-1} = {}^tB/detA.$

2. Résolution d'un système de Cramer

Proposition 5. Soient $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $X = {}^t\ (x_1, \ldots, x_n) \in M_{n,1}(K)$, $B = {}^t\ (b_1, \ldots, b_n) \in M_{n,1}(K)$. Alors le système linéaire $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si $detA \neq 0$ et dans ce cas on a , pour $1 \leq j \leq n$: $x_j = \Delta_j/detA$, où Δ_j est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la j^e colonne par la colonne des seconds membres.

3. Equation d'un hyperplan

Proposition 6. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $\mathcal{B}$ une base de E, $(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in E^{n-1}$ et $A = (a_{ij})$ la matrice des coordonnées de $v_1, \ldots, v_{n-1}$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $H = vect(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est un hyperplan de E si et seulement si on peut extraire de A une matrice $A' \in M_{n-1,n-1}(K)$ telle que $detA' \neq 0$. Dans ce cas, une équation cartésienne de H s'obtient en calculant : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0.$

4. Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 7. Soient E un R-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On dit que les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la **même orientation** (resp. l'**orientation opposée**) si $detP > 0$ (resp. $detP < 0$).

Proposition 7. Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble Ω de toutes les bases de E se partage en deux sous-ensembles disjoints non vides Ω_1 et Ω_2 tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, toutes les bases de Ω_1 (resp. Ω_2) ayant la même orientation.

On dit que l'on a fixé une orientation de l'espace si l'on a choisi un de ces sous-ensembles et dans ce cas les bases de ce sous-ensemble sont dites orientées positivement, celles de l'autre sous-ensemble sont dites orientées négativement.