

Test n°2 - A préparer pour la semaine du 13 au 17 octobre

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration, un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple. (Indication pour les questions 1 à 15 : 8 OUI, 7 NON).

1. L'intégrale $\int_2^\infty \frac{(t-7)\cos t}{t^2(\ln t)^3} dt$ est convergente.
2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{2t+1}{\sqrt{t}(\ln t)^2} dt$ est convergente.
3. L'intégrale $\int_0^\infty e^{-2t} \sin t dt$ est absolument convergente.
4. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ est absolument convergente.
5. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^{1/3}} dt$ est semi-convergente.
6. L'intégrale $\int_0^\infty \sqrt{t} \cos(t^2) dt$ est convergente.

Dans les trois questions suivantes, $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On pose, pour $x \geq 1$, $f^+(t) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \min(f(x), 0)$.

7. Si les intégrales $\int_1^\infty f^+(t) dt$ et $\int_1^\infty f^-(t) dt$ convergent alors l'intégrale $\int_1^\infty f(t) dt$ est absolument convergente.
8. Si l'intégrale $\int_1^\infty f^+(t) dt$ diverge alors l'intégrale $\int_1^\infty f(t) dt$ diverge.
9. Si $f(x) \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers l'infini alors l'intégrale $\int_1^\infty f(t) dt$ est convergente.

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n est suffisamment grand pour que l'expression où il figure soit définie.

10. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n-5)}$ est convergente.
11. La série $\sum \frac{n+3}{(n^2+1)(\ln n)^{3/2}}$ est convergente.
12. La série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est convergente.
13. La série de terme général $u_n = \frac{n^4}{3^n}$ est convergente.
14. La série de terme général $u_n = \frac{n}{3^{\ln n}}$ est convergente.
15. Une série $\sum u_n$ à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/4} u_n = 1/2$ est convergente.

16. (Section 2) Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^\infty f(t)dt$ converge alors f est une fonction bornée.

17. (Section 2) Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Alors l'intégrale $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente.

18. (Section 2) L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \sin t}dt$ est convergente.

19. (Section 2) La série de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est convergente.

20. (Section 2) Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que $1/3 \leq u_{n+1}/u_n \leq 1/2$, $n \geq 0$. Alors la série $\sum u_n$ est convergente et pour tout $n \in \mathbb{N}$, son reste r_n d'ordre n vérifie $u_n/2 \leq r_n \leq u_n$.