Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2002-2003
Mathématiques

Examen de Mathématiques - Deuxième session

Le 08/09/2003 - 8h30-12h30 - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS (3 points)

1. Soit A une matrice d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que si l'on échange entre elles deux colonnes de la matrice A, alors le déterminant de A change de signe.

2. Soit $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ une base d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension 4. Calculer $det_{\mathcal{B}}(b_4, b_3, b_2, b_1)$.

EXERCICE 1 (6 points)

1a. Etudier la convergence de la série numérique de terme général

$$u_n = (-1)^n \, \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{(2 \times 4 \times \ldots \times 2n)(2n+1)}, \quad n \geq 1$$

1b. Soit g la fonction à valeurs réelles définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) = (2 + x^2)^{-1/2}.$$

Montrer que g est développable en série entière au voisinage de zéro et donner son développement, en précisant le rayon de convergence R de la série entière correspondante.

1c. Soit f la fonction à valeurs réelles définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right).$$

Quelle est la dérivée de f ? Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro, on note $\sum a_n x^n$ la série entière correspondante. Calculer les coefficients a_n de cette série, ainsi que son rayon de convergence R'.

1d. Déterminer $\Delta = \{x \in \mathbb{R},\ \sum a_n x^n \text{ converge}\}$. Montrer que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[-R', R']$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

EXERCICE 2 (10 points)

Soient a et b deux paramètres réels. Soit $h_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, est

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3-2a \\ 3 & 5 & -3+a \\ b & b & -1 \end{bmatrix}$$

2a. Pour quelles valeurs des paramètres réels a et b l'endomorphisme $h_{a,b}$ est-il trigonalisable ? est-il diagonalisable ? (On remarquera que 2 est valeur propre de $h_{a,b}$).

Dans les questions suivantes, on suppose $ab = -9$.

2b. (i) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de $h_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$N_b = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & b \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad \text{où } c \text{ et } d \text{ sont des nombres réels que l'on déterminera.}$$

Ecrire la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.

(ii) Calculer N_b^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2c. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par récurrence par

$$u_0 = 1, v_0 = 2, w_0 = 3, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n + w_n \\ v_{n+1} = \ \ 3u_n + 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = -9u_n - 9v_n - w_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_n,\ v_n$ et w_n en fonction de n.

2d. Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x_1' = -4x_1 - 6x_2 + x_3 + e^{-3t} \\ x_2' = \ \ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + e^{-3t} \\ x_3' = -9x_1 - 9x_2 - x_3 + 6e^{-3t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où x_1, x_2 et x_3 sont des fonctions définies et continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (6 points)

Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n(t) = \dfrac{\sin(\pi t^n)}{n}$.

3a. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$.

3b. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ positive. La série $\sum h_n$ converge-t-elle normalement vers h sur $[0,1]$? sur les segments de $[0,1[$?

3c. Montrer que la fonction h est continûment dérivable sur $[0,1[$.

3d. Justifier que, pour tout nombre réel x, $0 < x < 1$, la fonction h est intégrable sur l'intervalle $[0,x]$ et exprimer cette intégrale comme la somme d'une série de fonctions.

3e. (i) Enoncer le théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante, portant sur la fonction $H : x \in [0,1[\to \int_0^x h(t)dt$, pour que l'intégrale généralisée $\int_0^1 h(t)dt$ soit convergente.

(ii) On pose $a_n = \int_0^1 h_n(t)dt$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série numérique $\sum a_n$ est convergente. En déduire que la fonction h est intégrable sur $[0,1]$.

(iii) Vérifier que pour tout entier $N \geq 1$, $\int_0^1 h(t)dt \geq \sum_{n=1}^{n=N} a_n$, et conclure que l'on a

$$\int_0^1 h(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$