Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2001-2002
Mathématiques

Examen de Mathématiques - Corrigé des exercices

EXERCICE 1

1a. Soit A un réel strictement supérieur à 2. Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_2^A \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt &= \left[\frac{-\cos t}{(\ln t)^\alpha}\right]_2^A - \int_2^A \frac{\alpha \cos t}{t(\ln t)^{\alpha+1}}dt \\ &= \frac{-\cos A}{(\ln A)^\alpha} - \frac{\cos 2}{(\ln 2)^\alpha} - \int_2^A \frac{\alpha \cos t}{t(\ln t)^{\alpha+1}}dt.\end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, le premier terme tend vers 0 et l'intégrale $\int_2^\infty \frac{\cos t}{t(\ln t)^{\alpha+1}}dt$ est absolument convergente. En effet, $|\cos t| \leqslant 1$ et $\int_2^\infty \frac{1}{t(\ln t)^{\alpha+1}}dt$ est une intégrale de Bertrand convergente. Par conséquent, pour $\alpha > 0$, l'intégrale I est convergente. *(1,5 pt)*

1b. Pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout réel t compris entre x_k et y_k, on a $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$. De plus, comme $\alpha \leqslant 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{(\ln t)^\alpha}$ est croissante. Comme $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi \geqslant e$, on obtient pour tout $t \in [x_k, y_k]$, $\frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha} \geqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 1$, on obtient : $\int_{x_k}^{y_k} \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt \geqslant \frac{\pi}{3}$ et donc, $\operatorname{Inf}\left\{\int_{x_k}^{y_k} \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt, k \in \mathbb{N}^*\right\} \geqslant \frac{\pi}{3} > 0$. *(0,75 pt)*
Si l'intégrale I était convergente, les suites de termes généraux $\int_2^{x_k} \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt$ et $\int_2^{y_k} \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt$ seraient convergentes de même limite. Mais alors la suite de terme général $\int_{x_k}^{y_k} \frac{\sin t}{(\ln t)^\alpha}dt$ devrait tendre vers 0 quand k tend vers l'infini. Ce qui est impossible car cette suite est minorée par $\frac{\pi}{3}$, donc l'intégrale I diverge si $\alpha \leqslant 0$. *(0,75 pt)*

EXERCICE 2

2a. Après calcul, le polynôme caractéristique vaut : $P(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4 - ab)$. *(0,5 pt)* Le nombre de racines réelles de ce polynôme dépend du discriminant du polynôme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 - ab$. Comme ce discriminant vaut $\Delta = 4ab$, on étudie les différentes valeurs possibles de ab.

(1$^{\text{er}}$ cas) Si $ab < 0$, le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et $g_{a,b}$ n'est pas trigonalisable (et donc pas diagonalisable). Dès que $ab \geqslant 0$, $g_{a,b}$ est trigonalisable. *(0,5 pt)*

(2$^{\text{e}}$ cas) Si $ab > 0$, comme $ab \neq 4$, les racines de $P(\lambda)$ sont réelles et distinctes, $g_{a,b}$ est donc diagonalisable. *(0,5 pt)*

– Si $ab = 0$, les valeurs propres sont 0 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2. Déterminons la dimension du sous-espace propre E_2. Pour cela, il suffit de déterminer le rang de la matrice :

$$C_{a,b} - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & b \\ -1 & -1 & 0 \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$$

(3^e cas) si $b \neq 0$ et $ab = 0$, alors $\text{rg}(C_{a,b} - 2I) = 2$ (car $\begin{vmatrix} -1 & b \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = b \neq 0$). Donc $\dim E_2 = 1$ et $g_{a,b}$ n'est pas diagonalisable. *(0,5 pt)*

(4^e cas) si $a \neq 0$ et $ab = 0$, alors $\text{rg}(C_{a,b} - 2I) = 2$ (car $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ a & -a \end{vmatrix} = 2a \neq 0$). Donc $\dim E_2 = 1$ et $g_{a,b}$ n'est pas diagonalisable. *(0,5 pt)*

(5^e cas) si $a = b = 0$, alors $\text{rg}(C_{a,b} - 2I) = 1$, donc $\dim E_2 = 2$ et $g_{0,0}$ est bien diagonalisable. *(0,5 pt)*

En conclusion, l'endomorphisme $g_{a,b}$ est donc trigonalisable si et seulement si $ab \geqslant 0$. De plus, elle est diagonalisable si et seulement si $a = 0 = b$ ou si $ab > 0$ et $ab \neq 4$.

2b. Un vecteur de coordonnées (x, y, z) appartient à E_2 si et seulement si $x + y = 0$. Les deux vecteurs $u_2 = e_1 - e_2$ et $u_3 = e_3$ forment donc une base de E_2 (car E_2 est de dimension 2). De plus, on montre facilement que le vecteur $u_1 = e_1 + e_2$ engendre le sous-espace propre E_0, car $a = 0$. Les vecteurs u_1, u_2, u_3 constituent une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $g_{0,0}$. Donc une base de l'ensemble des solutions du système différentiel $X' = C_{0,0}X$ est $(u_1, e^{2t}u_2, e^{2t}u_3)$. *(1 pt)* La solution générale s'écrit donc :

$$X = \begin{pmatrix} A + Be^{2t} \\ A - Be^{2t} \\ Ce^{2t} \end{pmatrix}, \qquad \text{où } A, B, C \text{ sont des réels.}$$

Il reste à déterminer les constantes A, B et C en fonction des conditions initiales, on a : $x_1(0) = 1 = A + B, x_2(0) = 0 = A - B, x_3(0) = 1 = C$. D'où la solution recherchée :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{e^{2t}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \\ e^{2t} \end{pmatrix}. \textit{(0,5 pt)}$$

2c. On sait déjà que $f_1 = e_1 + e_2$ forme une base de E_0 et que $f_2 = e_1 - e_2$ forme une base de E_2. Soit $xe_1 + ye_2 + ze_3$ le troisième vecteur de la base recherchée. Il doit vérifier l'équation $g_{0,2}(xe_1 + ye_2 + ze_3) = 2(xe_1 + ye_2 + ze_3) + (e_1 - e_2)$. En résolvant le système d'équations linéaires précédent, on trouve que le vecteur $f_3 = e_1 + e_3$ convient. La matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \textit{(0,5 pt)} \qquad \text{d'inverse } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \textit{(0,5 pt)}$$

et la matrice de $g_{0,2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$ est bien B. On peut écrire $B = D + N$, où

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $DN = ND$ et $N^2 = 0$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$B^n = D^n + nND^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} . \textit{(0,5 pt)}$$

Par conséquent, $C_{0,2} = PBP^{-1}, C_{0,2}^n = PB^nP^{-1}$, et on obtient

$$C_{0,2}^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1}(n+1) \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1}(1-n) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} . \textit{(0,5 pt)}$$

2d. On montre par récurrence que $Y_n = C_{0,2}^n Y_0$, donc :

$$Y_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 2^{n-1}(n+1) \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1}(1-n) \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(n+1) \\ 2^{n-1}(1-n) \\ 2^n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{1-n} = -1$ et on a bien u_n équivalent à $-v_n$.*(1 pt)*

EXERCICE 3

3a. On a, pour tout entier n, $f_n(0) = \frac{\pi}{2} - \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, pour tout réel $x > 0$, $1+nx$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc simplement vers la fonction f telle que $f(0) = \frac{\pi}{4}$ et $f(x) = 0$ pour tout réel $x > 0$. *(0,5 pt)*

3b. Comme chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et comme f n'est pas continue sur $[0, +\infty[$, la suite de fonctions f_n ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$. *(0,5 pt)*
Soit $b > 0$. Comme la fonction arctan est croissante, chaque fonction f_n est décroissante. Ainsi, on a :

$$\operatorname*{Sup}_{x\in[b,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = |f_n(b)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[b, +\infty[$ avec $b > 0$.*(0,5 pt)*

3c. Comme $a > 0$, on a pour tout réel $y \geqslant a$:

$$\frac{1}{1+2y+y^2} \leqslant \frac{1}{1+y^2} \leqslant \frac{1}{y^2}.$$

En intégrant cette inégalité entre a et ∞, on obtient l'inégalité requise.*(0,5 pt)*
De plus, la fonction $\arctan y$ est une primitive de $\frac{1}{1+y^2}$ et on déduit donc l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{1+a} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arctan a \leqslant \frac{1}{a},$$

d'où l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$:

$$\frac{1}{2+nx} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+nx} . \textit{(0,5 pt)}$$

3d. Pour tout $x > 0$, l'inégalité de la question précédente montre que $u_n(x) \leqslant \frac{1}{n+n^2x} \leqslant \frac{1}{n^2x}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. *(0,75 pt)*

Comme chaque fonction f_n est décroissante, chaque fonction u_n est décroissante. Il en est donc de même pour chaque somme partielle et la somme u de la série est décroissante sur $]0, +\infty[$. *(0,5 pt)*

3e. Soit $b > 0$, comme u_n est décroissante, on a : $\sup_{x\in[b,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(b)$. Comme la série $\sum u_n(b)$ est convergente, la série $\sum u_n$ est normalement convergente sur $[b, +\infty[$. *(0,5 pt)*

Chacune des fonctions u_n est continue et dérivable. Comme $\sum u_n$ converge uniformément sur chaque intervalle $[b, +\infty[$, la somme u est continue sur chaque intervalle $[b, +\infty[$, et donc sur $]0, +\infty[$. *(0,25 pt)* D'autre part, la dérivée de u_n vaut $u_n'(x) = \frac{-1}{n^2x^2+2nx+2}$. Comme $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2x^2}$, la série $\sum u_n'(x)$ converge simplement. De plus, $|u_n'(x)|$ est décroissante, de sorte que $\sum u_n'$ est normalement convergente sur tout intervalle $[b, +\infty[$ (comme ci-dessus). En appliquant le théorème de dérivation term à terme sur un segment $[b, c]$ avec $b < c$, on en déduit que u est dérivable sur tout segment $[b, c]$ avec $0 < b < c$, donc sur $]0, +\infty[$. *(1 pt)*

3f. D'après l'inégalité obtenue à la question 3c, on a : $|f_n(1)z^n| \leqslant \frac{|z|^n}{n+1}$. Cette suite est donc bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.

La série entière $\sum f_n(1)z^n$ diverge donc si $|z| > 1$, elle converge absolument si $|z| < 1$. Le rayon de convergence est donc égal à 1. Il reste à étudier la convergence de la série pour $|z| = 1$. *(1 pt)*

Pour $z = 1$, d'après la question 3c, on a : $f_n(1) \geqslant \frac{1}{2+n}$ et la série $\sum f_n(1)1^n$ diverge.

Pour $z \neq 1$, on peut écrire $z = e^{i\theta}$. Comme la suite $f_n(1)$ est decroissante et tend vers 0, on peut appliquer le critère d'Abel à la série $\sum f_n(1)e^{i\theta}$, qui est donc semi-convergente. *(1 pt)*

Pour prouver la dernière question, montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)x^n$ converge uniformément sur $[-1, 0]$. Soit $t \in [0, 1]$, et considérons la série alternée $\sum f_n(1)t^n(-1)^n$. D'après le critère des séries alternées, le reste de la série satisfait la majoration suivante : $|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(1)t^k(-1)^k| \leqslant f_{n+1}(1)t^{n+1} \leqslant f_{n+1}(1)$. On en déduit donc la majoration : $\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(1)t^k(-1)^k| \leqslant f_{n+1}(1)$. Comme $f_n(1)$ tend vers 0, on a prouvé que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)x^n$ converge uniformément sur $[-1, 0]$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues en -1, il en est de même pour la somme de la série et on a bien :

$$\lim_{x\to -1} v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1)(-R)^n. \textit{(1 pt)}$$