Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2002-2003
Mathématiques

Premier Partiel de Mathématiques

Le 14/11/2002 - 14h-17h - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS (5 points)

1. Enoncer le théorème de convergence et de majoration du reste des séries alternées. Démontrer la partie concernant la convergence.

2. Etudier la convergence de la série alternée de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}\Big), \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$$

Que peut-on en déduire :

(a) en relation avec le théorème démontré dans la question précédente ?

(b) en relation avec le théorème sur deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels telles que $u_n \sim v_n$ lorsque n tend vers l'infini ?

EXERCICE 1 (7 points)

(Les deux exercices sont indépendants.)

1a. Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} t^2 \ \cos t \ e^{-\sqrt{t}} \ dt$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} t^2 \ \cos t \ e^{-\sqrt{t}} \ dt.$

1b. (i) Soit β un nombre réel strictement positif. Etudier, suivant les valeurs de β, la convergence de l'intégrale :

$$I_\beta = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t} \ \sin t}{(t-1)^\beta} \ dt$$

(ii) Pour quelles valeurs du paramètre α réel l'intégrale $J_\alpha = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t^\alpha} \ dt$ est-elle absolument convergente, semi-convergente ou divergente ? (On ne demande pas de justifier la réponse.) En déduire pour quelles valeurs de $\beta > 0$ l'intégrale I_β est absolument convergente.

EXERCICE 2 (6,5 points)

2a. Etudier la convergence de la série de terme général suivant

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \ - \ 1, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2b. Etudier, suivant les valeurs du nombre réel γ, la convergence de la série de terme général

$$v_n = u_n + \gamma \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n}), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

2c. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad w_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Justifier la convergence de la série de terme général w_n et donner une majoration de son reste d'ordre n, $\quad r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k$.

En déduire que, lorsque la série de terme général v_n est convergente, son reste R_n d'ordre n vérifie, pour n assez grand,

$$R_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

EXERCICE 3 (5 points)

3a. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P, défini pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 1 \\ 3 & x & 1 & 0 \\ 0 & -2 & x & -3 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

(on remarquera que $x - 2$ divise P)

Dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}$, on considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$

$$c_1 = (x, 3, 0, 3), \quad c_2 = (2, x, -2, 2), \quad c_3 = (0, 1, x, 1), \quad c_4 = (1, 0, -3, x).$$

3b. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la suite de vecteurs (c_1, c_2, c_3, c_4) est-elle une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$? Pour quelles valeurs de x, la base $\mathcal{B}$ a-t-elle même orientation que la base canonique de $\mathbb{R}^4$?

3c. On considère la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}, en utilisant les déterminants.

(ii) Dans cette question, on suppose que $x = 2$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs c_1, c_2, c_3 et c_4. Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de F, en utilisant le calcul des déterminants et la question (i).

Barème du premier partiel S3 MIAS 2002

QUESTION DE COURS (5 points)

1. Enoncé : 0,5 + 0,5. Preuve : 2.

2. Etudier $\sum u_n$: 1. En déduire : (a) 0,5 + (b) 0,5.

EXERCICE 1. (7 points)

1a. Déf du pb : 0,5. Convergence : 1. En déduire : 1.

1b. (i) Déf du pb : 0,5. Borne 1 : 1. Borne $+\infty$: 1,5. (ii) Abs. conv. : 0,5 + 1.

EXERCICE 2. (6,5 points)

2a. DL : 0,5. DV : 1.

2b. DL : 1 CV ssi $\gamma = 1/8$: 1,5.

2c. 1+1,5.

EXERCICE 3. (5 points)

3a. 2 (à moduler suivant les erreurs de calcul).

3b. 0,5 + 0,5.

3c. (i) 1 + (ii) 1.

Prochaine réunion d'enseignement :

Mercredi 20/11/02, 12h50, salle 025, Bât. 336.

Harmonisation des notes du partiel : pour les correcteurs, prévoir de corriger environ un tiers des copies. Notes à donner au secrétariat au plus tard le lundi 25 novembre.

Feuille 6, Devoir 4, Test 5 (suites et séries de fonctions).