COHOMOLOGIE NON RAMIFIÉE DANS LE PRODUIT AVEC UNE COURBE ELLIPTIQUE

par

J.-L. Colliot-Thélène

Résumé. — Un théorème de Gabber (2002) permet de construire des classes de cohomologie non ramifiée dans le produit d'une variété et d'une courbe elliptique convenables. Le lien entre la cohomologie non ramifiée en degré 3 et la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension deux (2012) redonne ainsi un résultat récent de Benoist et Ottem sur le défaut de la conjecture de Hodge entière pour le produit d'une surface d'Enriques et d'une courbe elliptique convenable.

Abstract. — A method of Gabber (2002) produces unramified cohomology classes in the products of a suitable variety and a suitable elliptic curve. The connexion between third unramified cohomology and integral Hodge conjecture for codimension 2 cycles (2012) then leads to an alternate proof of a recent result of Benoist and Ottem on the product of an Enriques surface and a suitable elliptic curve.

Sauf mention expresse du contraire, la cohomologie employée ici est la cohomologie étale de SGA4. On utilise librement les propriétés de cette dernière, comme on peut les trouver dans dans le livre [**6**]. Pour la cohomologie non ramifiée, on renvoie le lecteur à [**3**] et aux références de cet article.

1. Cohomologie non ramifiée en tout degré

Théorème 1.1. — *Soit $X/\mathbb{C}$ une variété connexe, projective et lisse. Soit ℓ un nombre premier. Soit $\alpha \in H^i(X, \mathbb{Z}/\ell)$ une classe de cohomologie dont l'image dans $H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/\ell)$ est non nulle.*

(a) Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ et $\beta \in H^1(E, \mu_\ell)$ tels que l'image de $\alpha \cup \beta \in H^{i+1}(X \times E, \mu_\ell)$ dans $H^{i+1}(\mathbb{C}(X \times E), \mu_\ell)$ soit non nulle. En particulier, le groupe de cohomologie non ramifiée $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mu_\ell)$ est non nul.

(b) Si X peut être définie sur un corps de nombres, pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant j transcendant, le groupe de cohomologie non ramifiée $H^{i+1}_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mu_\ell)$ est non nul.

Démonstration. — D'après Gabber [**4**, Prop. A.4], dont on garde les notations, il existe une courbe lisse géométriquement connexe $U/\mathbb{Q}$, un point $P \in U(\mathbb{Q})$, et une suite exacte de U-schémas en groupes commutatifs lisses connexes

$$1 \to \mu_{\ell,U} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 1$$

dont la fibre au-dessus de P s'identifie à la suite exacte de Kummer

$$1 \to \mu_{\ell,\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \to 1$$

associée à $x \mapsto x^\ell$, et dont la restriction au-dessus de $V = U \setminus P$ est une isogénie de V-schémas abéliens de dimension relative 1. En outre toute ℓ-isogénie de courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$ munie d'un isomorphisme de son noyau avec μ_ℓ est donnée par l'évaluation de la suite exacte ci-dessus en un point de $U(\mathbb{C})$. L'invariant j des fibres de $\mathcal{E}' \to U$ hors du point P n'est en particulier pas constant, et prend une valeur transcendante sur $\mathbb{Q}$ en $M \in U(\mathbb{C})$ si et seulement si M n'est pas algébrique sur $\mathbb{Q}$. Notons pour simplifier $Y = \mathcal{E}'$. La suite exacte ci-dessus définit un torseur sur Y sous μ_ℓ, donc une classe $\beta \in H^1(Y, \mu_\ell)$. La restriction de cette classe au-dessus du point générique de Y est la classe d'une fonction rationnelle $g \in \mathbb{Q}(Y)^*/\mathbb{Q}(Y)^{*\ell} = H^1(\mathbb{Q}(Y), \mu_\ell)$. L'extension $\mathbb{Q}(Y)(g^{1/\ell})/\mathbb{Q}(Y)$ se spécialise au-dessus du point P en l'extension $\mathbb{Q}(t^{1/\ell})/\mathbb{Q}(t)$, où $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[t, 1/t]$.

Commençons par étendre la situation ci-dessus de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$. On note $Y_\mathbb{C} = Y \times_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ et $U_\mathbb{C} = U \times_\mathbb{Q} \mathbb{C}$. On a la projection $X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C} \to U_\mathbb{C}$. On considère le produit externe $\alpha \cup \beta \in H^{i+1}(X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C}, \mu_\ell)$. Il se spécialise au-dessus du point $P \in U(\mathbb{C})$ en une classe dans $H^{i+1}(X \times_\mathbb{C} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mu_\ell)$. La restriction de cette classe au point générique de $X \times_\mathbb{C} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est non nulle, car son résidu le long du diviseur défini par $t = 0$ dans $X \times \mathbb{A}^1$ est la classe de α dans $H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/\ell)$. D'après Gabber [**4**, Prop. A7], l'ensemble des points s de $U(\mathbb{C})$ tels que la restriction de $\alpha \cup \beta$ au point générique de la fibre géométrique de $X \times_\mathbb{C} Y_\mathbb{C} \to U_\mathbb{C}$ en s est nulle est une union dénombrable de fermés de $U_\mathbb{C}$. On a vu ci-dessus que P n'est pas dans cet ensemble. Cet ensemble est donc une union dénombrable de points de $U(\mathbb{C})$. Ceci établit le point (a).

Supposons maintenant $X = X_0 \times_k \mathbb{C}$, où $k \subset \mathbb{C}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. La cohomologie étale d'une variété sur un corps algébriquement clos, à coefficients de torsion premiers à la caractéristique, ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos ([M], VI.4.3). On dispose donc d'une classe $\alpha_0 \in H^i(X_0, \mathbb{Z}/\ell)$ d'image non nulle dans le groupe $H^i(k(X_0), \mathbb{Z}/\ell)$. D'après Gabber [**4**, Prop. A7], l'ensemble des points $s \in U_k$ tels que la restriction de $\alpha_0 \cup \beta_k$ au point générique de la fibre géométrique de $X_0 \times_k Y_k \to U_k$ en s est nulle est une union dénombrable de fermés de U_k, et donc, puisque P n'est pas dans cet ensemble, une union dénombrable de points de $U(k)$. Pour tout point M de $U(\mathbb{C}) \setminus U(k)$, la restriction de $\alpha_0 \cup \beta_k$ dans $H^i(\mathbb{C}(X \times_{\mathbb{C}} Y_M), \mathbb{Z}/\ell)$ est donc non nulle, ce qui établit (b). □

2. Cohomologie non ramifiée en degré 3 et conjecture de Hodge entière

Proposition 2.1. — *Soit $X/\mathbb{C}$ une variété connexe, projective et lisse, telle que* $\mathrm{Br}(X) \neq 0$.

(a) Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.

(b) Si le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est supporté sur une courbe, alors il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ soit en défaut.

(c) Si X peut être définie sur un corps de nombres, pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant j transcendant, $H^3_{nr}(\mathbb{C}(X \times E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$.

(d) Si le groupe de Chow des zéro-cycles de la variété complexe X est supporté sur une courbe, et X peut être définie sur un corps de nombres, pour toute courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ d'invariant j transcendant, la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ est en défaut.

Démonstration. — Supposons $\mathrm{Br}(X) \neq 0$. Soit ℓ un nombre premier avec $\mathrm{Br}(X)(\ell) \neq 0$. De la suite de Kummer pour la cohomologie étale sur X et sur le corps des fonctions $\mathbb{C}(X)$, et l'injectivité bien connue $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))$ [**5**, II, Cor. 1.10], on conclut qu'il existe $\alpha \in H^2(X, \mu_\ell)$ d'image non nulle dans $H^2(\mathbb{C}(X), \mu_\ell) = \mathrm{Br}(\mathbb{C}(X))[\ell]$. Le théorème 1.1 donne alors les points (a) et (c).

Dans un travail avec C. Voisin, en utilisant des résultats profonds de K-théorie algébrique, on a établi le résultat suivant [**3**, Thm. 1.1, Thm. 3.9] : pour toute variété W projective et lisse sur $\mathbb{C}$ dont le groupe de Chow des zéro-cycles $CH_0(W)$ est supporté sur une surface, ce qui signifie qu'il existe une surface projective lisse U sur $\mathbb{C}$ et un morphisme $U \to W$ tels que l'application induite $CH_0(U) \to CH_0(W)$ soit surjective, on a un isomorphisme de groupes *finis*

$$H^3_{nr}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq Z^4(W),$$

où $H^3_{nr}(W, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est la réunion des groupes $H^3_{nr}(W, \mathbb{Z}/n)$ et où $Z^4(W)$ est le quotient du groupe des cycles de Hodge dans $H^4(W, \mathbb{Z})$ par l'image des classes de cycles algébriques de codimension 2. Si le groupe de Chow des zéro-cycles de X est supporté sur une courbe C, alors le groupe de Chow des zéro-cycles de $X \times_{\mathbb{C}} E$ est supporté sur la surface $C \times_{\mathbb{C}} E$. On obtient ainsi (b) et (d). □

Rappelons ici que pour toute variété $X/\mathbb{C}$ projective, lisse, connexe, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{b_2-\rho} \to \mathrm{Br}(X) \to H^3_{\mathrm{Betti}}(X,\mathbb{Z})_{tors} \to 0,$$

où ρ est le rang du groupe de Néron-Severi et b_2 le second nombre de Betti de X (voir [**5**, III. (8.7) et (8.9)]), et que l'on a $b_2 - \rho = 0$ si et seulement si $H^2(X, O_X) = 0$. L'hypothèse que le groupe de Chow des zéro-cycles sur X est supporté sur une courbe implique $H^2(X, O_X) = 0$ et donc que le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est fini, et égal au groupe $H^3_{\mathrm{Betti}}(X,\mathbb{Z})_{tors}$.

Corollaire 2.2. — *Soit X une surface d'Enriques sur $\mathbb{C}$. Il existe une courbe elliptique $E/\mathbb{C}$ telle que la conjecture de Hodge entière pour les cycles de codimension 2 sur $X \times E$ soit en défaut. Si X peut être définie sur un corps de nombres, cette défaillance a lieu pour toute courbe elliptique E d'invariant j transcendant.*

Démonstration. — Pour toute surface d'Enriques $X/\mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Br}(X) = H^3_{\mathrm{Betti}}(X,\mathbb{Z})_{tors} = \mathbb{Z}/2,$$

et d'après [**2**] on a $CH_0(S) = \mathbb{Z}$. La proposition 2.1 s'applique donc à une telle surface. □

Remarque 2.3. — On retrouve donc ainsi [**1**, Prop. 2.1], dont la démonstration repose, dans le cas $\ell = 2$, sur une construction du même type que celle de [**4**] rappelée au début du théorème 1.1. Mais la démonstration de [**1**, Prop. 2.1] par Benoist et Ottem est plus "classique" que celle présentée ici, et elle donne d'autres informations.

Références

[1] O. Benoist et J. Ch. Ottem, Failure of the integral Hodge conjecture for threefolds of Kodaira dimension zero (en anglais), https ://arxiv.org/abs/1802.01845v1

[2] S. Bloch, A. Kas, D. Lieberman, Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$ (en anglais), Compositio Math. **33** (1976), no. 2, 135–145.

[3] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. 161 (2012), no. 5, 735–801.

[4] O. Gabber, appendice à l'article *Exposant et indice d'algèbres simples centrales non ramifiées*, par J.-L. Colliot-Thélène, Enseign. Math. (2) 48 (2002), no. 1-2, 127–146.

[5] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, dans *Dix exposés sur le cohomologie des schémas*, Masson, Paris, et North-Holland, Amsterdam, 1968, 46–66 (I), 67–87 (II), 88–188 (III).

[6] J. S. Milne, Étale Cohomology (en anglais), Princeton University Press, 1980.

---

12 février 2018

J.-L. Colliot-Thélène, Université Paris Sud, Université Paris-Saclay, Mathématiques, Bâtiment 307, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* jlct@math.u-psud.fr